

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
Национальный исследовательский университет
Программа повышение конкурентоспособности ННГУ им. Н.И. Лобачевского
Стратегическая инициатива 7 «Достижение лидирующих позиций в области суперкомпьютерных технологий и высокопроизводительных вычислений»

Основные образовательные программы
Радиофизика, Информационные технологии,
Информационная безопасность телекоммуникационных систем

Учебно-методическая разработка по дисциплинам
Физическая электроника, Электроника и схемотехника

Е.В.Волкова, А.С.Пузанов, С.В.Оболенский

ПРИМЕНЕНИЕ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ
В ЗАДАЧАХ МОДЕЛИРОВАНИЯ
ТРАНСПОРТА ЭЛЕКТРОНОВ В ПОЛУПРОВОДНИКАХ
В УСЛОВИЯХ РАДИАЦИОННОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ

Нижегород,
2014 год

УДК 53.082, 538.95

ББК 32.85

В67

В67 Волкова Е.В., Пузанов А.С. Оболенский С.В. Применение параллельных вычислений в задачах моделирования транспорта электронов в полупроводниках в условиях радиационного воздействия: Учебное пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2014. – 81 с.

Данное пособие является продолжением цикла учебных пособий по полупроводниковой электронике и содержит информацию о физических основах полупроводниковых структур и особенностях применения высокопроизводительных вычислений для анализа радиационной стойкости.

Пособие предназначено для студентов дневного и вечернего отделений, изучающих курсы «Электроника и схемотехника» и «Физическая электроника».

УДК 53.082, 538.95

ББК 32.85

© Нижегородский государственный
университет им. Н.И. Лобачевского, 2014

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	4
1. Классификация твердых тел	6
2. Статистика электронов и дырок в полупроводниках	10
2.1. Распределение квантовых состояний в зонах	10
2.2. Распределение Ферми-Дирака	11
2.3. Концентрация электронов и дырок в зонах	12
2.4. Зависимость уровня Ферми от температуры для невырожденных полупроводников	14
2.5. Кинетические явления в полупроводниках	17
2.5.1. Поведение носителей заряда в постоянном однородном слабом электрическом поле	17
2.5.2. Поведение носителей заряда в сильном электрическом поле	21
3. Основные уравнения для анализа работы полупроводниковых приборов	35
3.1. Основные уравнения	35
3.2. Примеры применения основных уравнений в задачах радиационной физики	38
4. Моделирование переноса носителей заряда в полупроводниках при воздействии квантов высоких энергий с использованием параллельных вычислений	44
4.1. Общие положения	44
4.2. Сведение системы уравнений переноса носителей заряда к дифференциально-алгебраической системе уравнений	47
4.3. Методы решения системы дифференциально-алгебраических уравнений с использованием параллельных вычислений	50
4.4. Примеры результатов моделирования с использованием параллельных вычислений	58
4.4.1. Решение уравнения Пуассона с применением технологии массивно-параллельных вычислений	58
4.4.2. Решение системы уравнений переноса носителей заряда в полупроводниках с применением технологии CUDA массивно-параллельных вычислений	60
Заключение	65
Литература	66

ВВЕДЕНИЕ

Учебное пособие предназначено для студентов и читателей, не являющихся специалистами в области физики полупроводников и параллельных вычислений, но активно изучающих эти динамично развивающиеся области знаний. Некоторые примеры, используемые в пособии, весьма просты и предназначены для студентов бакалавриата. Магистранты и аспиранты могут их пропустить без ущерба для понимания. Последние разделы пособия, наоборот, достаточно сложны и в большей степени предназначены для информированных читателей.

Авторы постарались в относительно простой форме изложить подходы, применяемые в физике полупроводников для анализа сложнейшего комплекса физических процессов, возникающих в полупроводниковых структурах при воздействии радиационных излучений космического пространства и/или ядерного взрыва. Из-за того, что проникающие радиационные излучения ионизуют материалы, т.е. резко увеличивают их проводимость, электрические токи способны протекать через диэлектрики, иные области и слои веществ, где они крайне **нежелательны**, потому что сильно мешают штатному функционированию полупроводниковых приборов, а в некоторых случаях могут являться причиной электрического пробоя и дальнейшего выхода приборов из строя. Для подавления указанных процессов приходится проектировать специальное защищенное оборудование и использовать особую конструкцию полупроводниковых элементов и интегральных схем. При этом сам процесс проектирования значительно усложняется и требует применения суперкомпьютеров. Все это потребовало объединить в одном учебном пособии как основы твердотельной электроники, так и современные, достаточно сложные для понимания, разделы радиационной физики полупроводников.

Учебное пособие разбито на две части. Первые разделы более просты и посвящены физике явлений переноса электронов в полупроводниковых струк-

турах и особенностям транспорта электронов в современных полупроводниковых приборах с характерными длинами рабочих областей 20...100 нм. Эта часть является логическим продолжением методической работы авторов [1, 10] и опирается на классические монографии [2-9]. Последний раздел посвящен особенностям методов параллельных вычислений в задачах моделирования движения электронов и дырок в полупроводниковых структурах. Этот раздел носит обзорный характер и опирается на данные научных статей [11-33]. Вопросы использования высокопроизводительных вычислений рекомендуется изучать по литературе [34-49].

1. КЛАССИФИКАЦИЯ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

Трудно сказать, когда впервые появилось понятие о проводниках и непроводниках электрического тока. Можно предположить, что эти понятия возникли почти одновременно с термином «электричество» [1-10]. Тем не менее, бесконечное разнообразие материалов сначала было разделено на две группы:

- проводники (с удельной электропроводностью $\sigma=10^5-10^6 \text{ Ом}^{-1}\text{см}^{-1}$), к которым были отнесены все изученные к этому времени металлы, графит,
- непроводники (с удельной электропроводностью $\sigma=10^{-15}-10^{-10} \text{ Ом}^{-1}\text{см}^{-1}$) – все твердые неметаллы.

По мере того, как шло время, расширялись знания об окружающих материалах, но классификация твердых тел по величине удельной электропроводности сохранилась. В первом приближении считают, что твердые тела могут быть разделены на три больших класса: металлы, диэлектрики и полупроводники.

твердые тела

диэлектрики	полупроводники	металлы
$\sigma < 10^{-10} \text{ Ом}^{-1}\text{см}^{-1}$	$\sigma=10^{-10}-10^4 \text{ Ом}^{-1}\text{см}^{-1}$	$\sigma=10^4-10^6 \text{ Ом}^{-1}\text{см}^{-1}$

 (1)

Можно считать, что первые исследования свойств полупроводников были проведены Фарадеем в 1833 г., когда он обнаружил, что электропроводность сульфида серебра (Ag_2S) увеличивается с увеличением температуры. Стало ясно, что нельзя разделять вещества на различные классы только по величине их удельной проводимости при какой-то температуре. В XX веке Иоффе обратил внимание на то, что от металлов полупроводники прежде всего отличаются не величиной, а характером зависимости σ (Т). По определению Иоффе *полупроводниками* называются вещества, электропроводность которых возрастает при повышении температуры.

Но уже сегодня данное определение вызывает ряд возражений, одно из которых, например, состоит в том, что у сильно легированных полупроводников проводимость с повышением температуры не растет, а слабо уменьшается. Таким образом, дать единое определение понятия полупроводника весьма затруднительно. В табл. 1 приведена периодическая система элементов Менделеева, в которой выделены основные элементы, используемые для изготовления полупроводниковых приборов.

Наиболее общим является следующее определение. *Полупроводник* – это вещество, характерной чертой которого является способность изменять свои свойства в чрезвычайно широких пределах под влиянием различных воздействий (температуры, освещения, электрических и магнитных полей, давления). Например, электропроводность может изменяться в 10^6 - 10^7 раз. Такой чувствительностью не обладают ни металлы, ни диэлектрики.

К полупроводникам относятся:

1. простые химические элементы: В, С, Si, Ge, Р и др. соединения III, IV и V групп периодической системы Д.И.Менделеева (см. таблицу 1);
2. сложные химические соединения: бинарные $A^{III}B^V$ (GaAs, InP, GaP), $A^{II}B^{VI}$ (CdSe, CdTe), а также тройные и четверные соединения;
3. органические соединения: нафталин, бензол;

Наиболее типичными, хорошо изученными и широко применяющимися на настоящий момент являются Ge, Si, Te, GaAs.

В изолированном атоме электроны находятся в стационарных состояниях, каждому из которых соответствуют строго определенные дискретные значения энергии. В кристаллическом твердом теле из-за возмущений, вносимых другими атомами, уровни расщепляются - образуются области или зоны разрешенных значений энергии, между которыми находятся запрещенные зоны. Для глубоких уровней расщепление невелико, т.к. находящиеся на них электроны экранируются верхними оболочками и практически не взаимодействуют с соседними атомами.

Таблица 1 Периодическая система элементов Д.И.Менделеева [1]

Периоды	Ряды	Группы элементов									
		I	II	III	IV	V	VI	VII	VII		
1	I	H 1									He 2
2	II	Li 3	Be 4	B 5 Бор 10.8 $2p^1$	C 6 Углерод 12.0 $2p^2$	N 7 Азот 14.0 $2p^3$	O 8 Кислород 16.0 $2p^4$	F 9	Ne 10		
3	III	Na 11	Mg 12	Al 13 Алюминий 27.0 $3p^1$	Si 14 Кремний 28.08 $3p^2$	P 15 Фосфор 31.0 $3p^3$	S 16 Сера 32.07 $3p^4$	Cl 17	Ar 18		
4	IV	K 19	Ca 20	Sc 21	Ti 22	V 23	Cr 24	Mn 25	Fe 26	Co 27	Ni 28
	V	Cu 29	Zn 30	Ga 31 Галлий 69.72 $4p^1$	Ge 32 Германий 72.6 $4p^2$	As 33 Мышьяк 74.9 $4p^3$	Se 34 Селен 78.96 $4p^4$	Br 35	Kr 36		
5	VI	Rb 37	Sr 38	Y 39	Zr 40	Nb 41	Mo 42	Tc 43	Ru 44	Rh 45	Pd 46
	VII	Ag 47	Cd 48	In 49 Индий 114,8 $5p^1$	Sn 50 Олово 118,7 $5p^2$	Sb 51 Сурьма 121,7 $5p^3$	Te 52 Теллур 127,6 $5p^4$	I 53	Xe 54		
6	VIII	Cs 55	Ba 56	La-Lu 57- 71	Hf 72	Ta 73	W 74	Re 75	Os 76	Ir 77	Pt 78
	IX	Au 79	Hg 80	Tl 8	Pb 82	Bi 83	Po 84	At 85	Rn 86		
7	X	Fr 87	Ra 88	Ac-Lr 89-103	Ku 104	Ns 105	106	107			

Si, Ge, GaAs - основные полупроводниковые материалы.

Al, Au - основные металлы, используемые в микроэлектронике.

B, P, S, Si, Ga, As, Ge, In, Sb, Sn - основные легирующие примеси.

Для внешних валентных оболочек расщепление может составлять несколько электрон-вольт. Зона, образуемая из этих уровней, обычно называется валентной. Наряду с заполненными уровнями, на которых в невозмущенном состоянии находятся электроны, в изолированном атоме имеются и более высокие уровни - обычно пустые, которые могут заполняться, например, когда атом переходит в возбужденное состояние. В твердом теле эти уровни расщепляются, образуя зоны, из которых ближайшая к валентной зоне называется зоной проводимости.

Поскольку энергетические зоны образованы из соответствующих уровней изолированных атомов, то общее число электронов, которые могут разместиться в данной зоне, равно общему числу мест на уровнях изолированных атомов, из которых образован кристалл. Так как внутренние оболочки в изолированных атомах целиком заполнены, то заполнены и соответствующие им зоны кристалла.

Это означает, что электроны внутренних оболочек не дают вклада в электропроводность (даже под воздействием электрического поля ни один электрон не может изменить своего энергетического состояния, т.к. все соседние уровни заняты, а на каждом уровне помещаются только два электрона).

Иначе обстоит дело в валентной зоне и зоне проводимости. Если валентная зона заполнена электронами лишь частично или имеется перекрытие заполненной валентной зоны и пустой зоны проводимости, то свободно осуществляются энергетические переходы, обусловленные ускорением электронов во внешнем поле. Электропроводность такого твердого тела имеет металлический характер. Если между валентной зоной и зоной проводимости имеется запрещенная зона конечной ширины, то при абсолютном нуле, полном затемнении и не слишком сильном электрическом поле твердое тело **не проводит** электрический ток. При повышении температуры или освещении такого тела электроны из валентной зоны **переходят** в зону проводимости. Таким образом, появляются электроны в зоне проводимости, участвующие в переносе тока, и освобождают-

ся верхние уровни валентной зоны, что позволяет участвовать в переносе тока и электронам валентной зоны (дырочная проводимость). Такой материал является полупроводником. С точки зрения зонной теории разница между полупроводниками и диэлектриками заключается только в ширине запрещенной зоны. Обычно к полупроводникам относят материал с шириной запрещенной зоны < 2 эВ. Ширина запрещенной зоны германия составляет около 0.7 эВ, кремния - 1.1 эВ, арсенида галлия (GaAs) - 1.4 эВ.

2. СТАТИСТИКА ЭЛЕКТРОНОВ И ДЫРОК В ПОЛУПРОВОДНИКАХ

2.1 РАСПРЕДЕЛЕНИЕ КВАНТОВЫХ СОСТОЯНИЙ В ЗОНАХ (ПЛОТНОСТЬ КВАНТОВЫХ СОСТОЯНИЙ)

Нахождение точного вида зависимости плотности квантовых состояний от энергии $N(W)$ - очень сложная задача. Однако, если учесть, что электроны заполняют только уровни вблизи дна зоны проводимости, то справедливо приближение эффективной массы и плотность состояний может быть вычислена.

В приближении эффективной массы (в изотропном случае) энергия электронов вблизи края зоны может быть описана в виде:

$$W = W_c + \frac{p^2}{2m_n^*} \quad (2)$$

где W_c - край зоны проводимости, m_n^* - эффективная масса электрона в зоне проводимости. В этом случае поверхности равной энергии в пространстве импульсов являются сферами с радиусом p . Выделим шаровой слой, заключенный между двумя изоэнергетическими поверхностями, соответствующими энергиям W и $W+dW$. Объем этого слоя имеет величину

$$dV_p = 4\pi p^2 dp \quad (3)$$

Запишем соотношение неопределенностей для трех пространственных координат x, y, z :

$$dx dp_x = h ; \quad dy dp_y = h ; \quad dz dp_z = h,$$

где h – постоянная Планка. Перемножая левые и правые части этих выражений, получим объем минимальной фазовой ячейки в шестимерном пространстве координат-импульсов:

$$dx dy dz dp_x dp_y dp_z = h^3$$

В дальнейшем будем считать, что $dx dy dz = 1 \text{ см}^3$, тогда h^3 -минимальный объем ячейки в пространстве импульсов. В каждой ячейке могут находиться два электрона с противоположными спинами. С учетом этого, число состояний в объеме dV_p равно:

$$dz = 2 \frac{dV_p}{h^3} = \frac{8\pi p^2 dp}{h^3} \quad (4)$$

Из равенства (2) имеем:

$$p = \left((2m_n^*) (W - W_c) \right)^{1/2} \quad (5)$$

откуда

$$dp = \frac{1}{2} \left((2m_n^*) (W - W_c) \right)^{-1/2} dW \quad (6)$$

Подставляя (5) и (6) в (4), получим выражение для плотности квантовых состояний у дна зоны проводимости:

$$N(W) = \frac{dz}{dW} = 4\pi \left[\frac{2m_n^*}{h^2} \right]^{3/2} (W - W_c)^{1/2} \quad (7)$$

Аналогично определяется плотность состояний вблизи краев валентной зоны.

2.2 РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ФЕРМИ-ДИРАКА

Для определения числа электронов в зоне проводимости или дырок в валентной зоне кроме плотности состояний необходимо знать также вероят-

ность заполнения каждого состояния (уровня энергии) электронами. С точки зрения статической физики в состоянии термодинамического равновесия идеальный газ электронов – частиц с полуцелым спином – подчиняется статистике Ферми-Дирака, т.е. вероятность заполнения элементарной фазовой ячейки электроном равна:

$$f(W) = \frac{1}{\exp((W - F)/kT) + 1} \quad (8)$$

где k - постоянная Больцмана, T - абсолютная температура, F – энергетический уровень, называемый - уровень Ферми. Нетрудно видеть, что при $T=0$ функция Ферми принимает всего два значения: она равна нулю при $W > F$ и равна 1 при $W < F$; при $W = F$ имеется скачок функции. Таким образом, энергия Ферми - это максимальная энергия электронов при абсолютном нуле температуры. Для отличной от нуля температуры функция $f(W)$ в точке $W = F$ имеет точку перегиба. Полное число состояний в объеме V равно:

$$N = \sum_i f(W) = \sum_i \frac{1}{\exp((W - F)/kT) + 1} \quad (9)$$

где суммирование ведется по всем квантовым состояниям в объеме V с учетом спина. Равенство (9) определяет энергию Ферми как функцию концентрации электронов $n = N/V$ и температуры.

Рассмотрим случай, когда $T > 0$. Из выражения (8) следует, что для $W = F$: $f(W) = 1/2$. При очень больших энергиях, когда $W - F \gg kT$, можно пренебречь 1 в знаменателе и выражение $f(W)$ принимает вид:

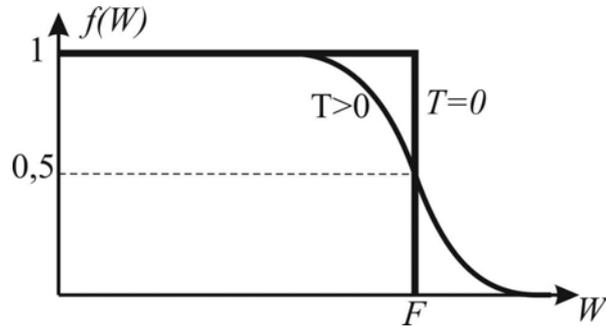
$$f(W) = \exp((F - W)/kT) \quad (10)$$

т.е. совпадает с функцией Максвелла-Больцмана для частиц, подчиняющихся классическим законам. Аналогично, при очень малых энергиях, когда $W \ll F$ (но $W - F \gg kT$), экспонента в знаменателе (8) очень мала и, разлагая функцию $f(W)$ в ряд по малому параметру и ограничиваясь нулевым и первым членами, получим:

$$f(W) = 1 - \exp((W - F)/kT) \quad (11)$$

Таким образом, функция Ферми имеет вид, показанный на рисунке 1.

Рис. 1. Функция Ферми



2.3 КОНЦЕНТРАЦИЯ ЭЛЕКТРОНОВ И ДЫРОК В ЗОНАХ

Как говорилось выше, общее число состояний в любой зоне кристалла равно общему числу мест на уровнях изолированных атомов, образовавших кристалл, т.е, равно числу атомов N_0 , умноженному на кратность вырождения ν атомного уровня, образовавшего данную зону:

$$\int_{W_1}^{W_2} N(W)dW = \nu N_0$$

где $N(W)dW$ - число состояний в интервале энергий от W до $W+dW$, а $N(W)$ - называется плотностью состояний: W_1 и W_2 - энергия нижнего и верхнего края зоны.

Зная зависимость плотности состояний в зоне проводимости от энергии и вероятность заполнения этих состояний, можно определить число свободных электронов dn , энергия которых заключена в интервале от W до $W+dW$:

$$dn = f(W) \cdot N(W)dW, \quad (12)$$

а отсюда, интегрируя по всей зоне проводимости, можно найти полное число находящихся в ней электронов. Так как функция Ферми быстро спадает с ростом энергии, верхний предел можно заменить бесконечностью.

В элементарных функциях данный интеграл не вычисляется, и для его нахождения используют специальные таблицы. Однако, если уровень Ферми лежит в запрещенной зоне достаточно далеко от ее краев, т.е. $W_c - F \gg kT$, то справедливо приближение Больцмана для функции Ферми и интеграл можно вычислить. Такой полупроводник называется невырожденным. Интегрируя (12) в данном приближении, имеем:

$$n = \int_{W_c}^{\infty} f(W)N(W)dW, \quad (13)$$

$$n = 4 \left[\frac{2m_n^*}{h^2} \right]^{3/2} e^{F/kT} \int_{W_c}^{\infty} (W - W_c)^{1/2} e^{-W/kT} dW, \quad (14)$$

$$n = 2 \left[\frac{2\pi m_n^* kT}{h^2} \right]^{3/2} e^{-\frac{W_c - F}{kT}} = N_c e^{-\frac{W_c - F}{kT}}, \quad (15)$$

где N_c – так называемая, эффективная плотность состояний в зоне проводимости. Аналогично, концентрация дырок:

$$p = N_v e^{-\frac{F - W_v}{kT}} \quad (16)$$

Таким образом, концентрация электронов и дырок зависит от положения уровня Ферми в запрещенной зоне полупроводника, а уровень Ферми, в свою очередь, является функцией концентрации.

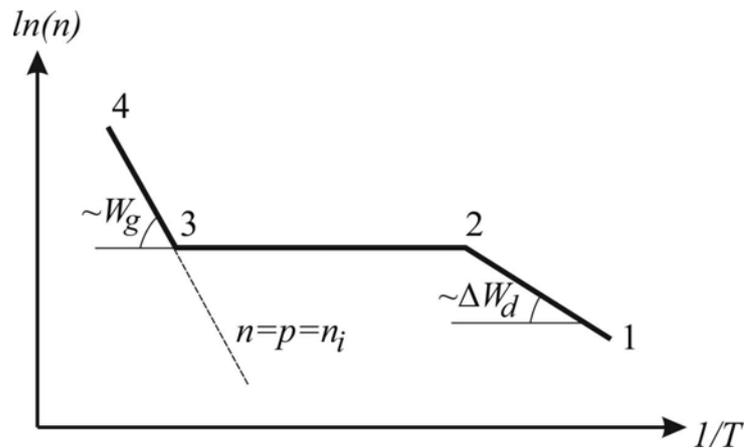
При низких температурах концентрация носителей в легированном полупроводнике определяется примесями. При очень низких температурах, когда еще не все примеси ионизованы, уровень Ферми, например, для электронного полупроводника, лежит примерно посередине между уровнем донорной примеси и дном зоны проводимости, т.е. $F = (W_c + W_d) / 2$. Тогда (16) принимает вид:

$$n = N_c e^{-\frac{W_c - W_d}{2kT}} = N_c e^{-\frac{\Delta W_d}{2kT}},$$

где ΔW_d - энергия ионизации доноров.

Для более высоких температур, когда вся примесь ионизована, но вероятность перехода электронов из валентной зоны еще мала, концентрация носителей заряда просто равна концентрации примеси $n=N_d$.

Рис. 2 Зависимость концентрации электронов в примесном полупроводнике от температуры [1]



Таким образом, зависимость концентрации от температуры имеет три участка (см. рис. 2). Область примесной проводимости при низких температурах – 1-2; область истощения примесей – участок 2-3 и область собственной проводимости – участок 3-4. В координатах $\ln n$, $1/T$ экспоненты (19), (16) выглядят как прямые, наклон которых характеризуется величинами W_g и ΔW_d .

2.4 ЗАВИСИМОСТЬ УРОВНЯ ФЕРМИ ОТ ТЕМПЕРАТУРЫ ДЛЯ НЕВЫРОЖДЕННЫХ ПОЛУПРОВОДНИКОВ

Собственный полупроводник

Рассмотрим собственный полупроводник т.е. такой, для которого влияние примесных атомов не существенно. В таком случае носители возникают только за счет разрыва валентных связей, поэтому в собственном полупроводнике чис-

ло дырок равно числу электронов $n=p=n_i$. Это условие электронейтральности материала. Из данного условия, приравняв (15) и (16), получим:

$$F = \frac{W_c + W_V}{2} + \frac{kT}{2} \ln \frac{N_V}{N_c} = \frac{W_c + W_V}{2} + \frac{3kT}{4} \ln \frac{m_n^*}{m_p^*}, \quad (17)$$

т.е. уровень Ферми F собственного полупроводника лежит вблизи середины запрещенной зоны. Этот случай показан на рисунке 3а, где слева направо схематически приведены простейшая зонная диаграмма, плотность состояний $N(W)$, распределение Ферми $f(W)$ и концентрация носителей заряда. Заштрихованные области, площадь которых равна концентрации электронов и дырок, соответственно равны и показывают, что $n=p=n_i$.

Примесный полупроводник

Если в полупроводник введены примесные атомы, как показано на рисунке 3 б и в, уровень Ферми должен смещаться для сохранения электронейтральности.

В случае б, например, в кристалл добавляется донорная примесь с концентрацией доноров N_d (см⁻³). Для сохранения электронейтральности отрицательный заряд электронов должен быть равен полному заряду дырок и ионизованных доноров

$$n = N_d + p \quad (18)$$

Следовательно, $n > p$ и уровень Ферми обязан сместиться к дну зоны проводимости, как показано на рисунке 3б.

Температурная зависимость концентраций электронов и дырок в собственном полупроводнике определяется формулами (15) и (16). Этими же формулами определяются и концентрации носителей в примесном полупроводнике

при достаточно высоких температурах, когда количество электронов в зоне проводимости и дырок в валентной зоне определяется переходами электронов через запрещенную зону. При этом уровень Ферми лежит вблизи середины запрещенной зоны, т.е. $F = (W_c + W_v) / 2$. Подставляя в (15), получим концентрацию электронов:

$$n = N_c e^{-\frac{W_c - W_v}{2kT}} = N_c e^{-\frac{\Delta W_g}{2kT}} \quad (19)$$

где ΔW_g - ширина запрещенной зоны. Величина N_c зависит от температуры по закону $T^{3/2}$. Эта зависимость слабая по сравнению с экспонентой, поэтому температурная зависимость концентрации определяется, в основном, множителем $\exp(-\Delta W_g / 2kT)$.

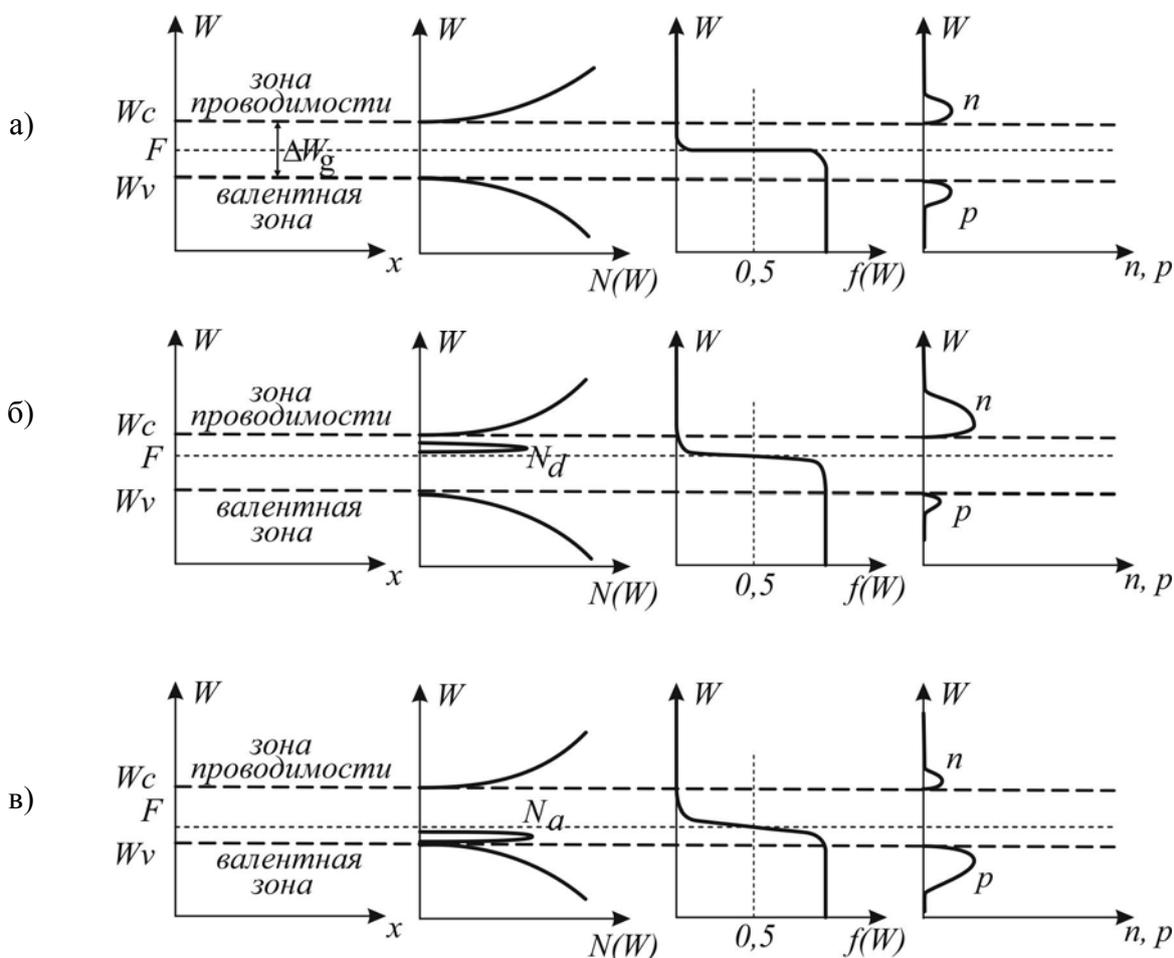


Рис.3 Взаимное соотношение функций Ферми, плотности состояний и распределения электронов по энергии относительно краев запрещенной зоны [1]: а) в собственном полупроводнике; б) в полупроводнике n -типа; в) в полупроводнике p -типа

2.5 КИНЕТИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ В ПОЛУПРОВОДНИКАХ

2.5.1 Поведение носителей заряда в постоянном однородном слабом электрическом поле

Понятие подвижности и удельной электропроводности

Как показывает теория [1], в строго периодическом поле, т.е. в идеальной кристаллической решетке с неподвижными атомами, движение электрона подобно движению свободной частицы - ускорение электронов пропорционально электрическому полю и обратно пропорционально их эффективной массе. Однако из-за тепловых колебаний атомов решетки, примесей и **других** возможных дефектов кристалла электрон движется ускоренно лишь на небольшом участке пути, а затем испытывает соударение, теряя направленную скорость, и весь процесс начинается сначала. Поэтому пропорциональной напряженности электрического поля E оказывается не ускорение, а средняя скорость движения электронов:

$$v = \mu_n E .$$

Коэффициент пропорциональности между скоростью и полем μ_n называют подвижностью электронов. Следует заметить, что эта формула справедлива только для напряженностей электрического поля менее 10^3 В/см, а для более сильных полей наблюдается насыщение средней скорости электронов и она выходит на постоянное, не зависящее от электрического поля значение $\sim 10^7$ см/с. Это объясняется тем, что электроны при таких больших полях более эффективно передают свою энергию фононам – колебаниям кристаллической решетки.

Каждый электрон дает вклад в ток, равный $e v$, а полная плотность тока, создаваемого всеми электронами равна:

$$j = e n v = e n \mu_n E , \quad (20)$$

где n - концентрация электронов. Зависимость плотности тока от электрического поля так же имеет насыщение, а при полях более 10^5 В/см наблюдается явление лавинного пробоя.

Из (20) видно, что плотность тока пропорциональна полю в соответствии с законом Ома: $j = \sigma E$, где $\sigma = en\mu_n$. Если имеется два типа носителей в полупроводнике (электроны и дырки), то проводимость равна:

$$\sigma = e(n\mu_n + p\mu_p). \quad (21)$$

Таким образом, для определения температурной зависимости проводимости необходимо знать зависимость от температуры концентрации и подвижности носителей.

Зависимость подвижности носителей заряда от температуры.

Выше уже упоминалось, что длина свободного пробега, а следовательно, и подвижность электронов в реальных кристаллах определяется нарушениями периодического потенциала, обусловленными тепловыми колебаниями, примесями и другими дефектами решетки. Рассмотрим каждый из механизмов рассеяния электронов подробнее.

Рассеяние носителей заряда на нейтральных атомах примеси и нейтральных дефектах слабое. Однако, при низких температурах, когда ионизованные примеси "вымораживаются", а тепловые колебания отсутствуют, этот механизм играет существенную роль. Для того, чтобы электрон изменил направление своего движения в результате взаимодействия с нейтральной примесью или дефектом, необходим акт столкновения в буквальном смысле слова - траектория электрона должна проходить через место расположения дефекта либо через непосредственно примыкающую к нему область решетки, в которой им вызваны искажения. Рассеяние на нейтральных примесях не зависит от температуры, и подвижность, обусловленная этим рассеянием, постоянна и зависит только от концентрации рассеивающих центров.

Электрическое поле ионизованного примесного атома распространяется значительно дальше, и электрон, проходя на значительном расстоянии от него, изменит под действием этого поля направление своего движения. Пусть рассеяние в полупроводнике происходит только на ионах примеси, а тепловые колебания и нейтральные центры рассеяния отсутствуют. Тогда, как показывает расчет [1], подвижность зависит от температуры как $T^{3/2}$, т.е. увеличивается. Этот результат легко понять, если учесть, что с ростом температуры увеличивается средняя скорость хаотического движения электронов, а быстрые электроны слабее отклоняются статическим полем ионов. Этот механизм рассеяния играет основную роль при температурах, когда уже имеется большая концентрация ионизированных примесей, но тепловые колебания еще мало влияют на рассеяние.

Рассмотрим теперь полупроводник, в котором отсутствуют примеси и дефекты, а рассеяние происходит только на тепловых колебаниях решетки. С ростом температуры амплитуда колебаний возрастает или, говоря языком квантовой статистики, возрастает концентрация фононов в кристалле. Очевидно, что рассеяние с ростом температуры должно усиливаться, а подвижность падать. Для неполярных полупроводников, таких как германий и кремний, уменьшение подвижности происходит по закону $T^{-3/2}$.

Если же действуют одновременно все три механизма рассеяния, то результирующая подвижность будет определяться так:

$$\frac{1}{\mu_0} = \frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} + \frac{1}{\mu_3}. \quad (22)$$

Поскольку подвижность - это средняя скорость в единичном электрическом поле, то она пропорциональна среднему времени свободного пробега τ , за которое электрон набирает направленную скорость. Если τ_1, τ_2, τ_3 - времена свободного пробега для каждого из трех механизмов рассеяния, то $1/\tau_1, 1/\tau_2, 1/\tau_3$ - соответствующие частоты столкновений. Когда действует несколько механиз-

мов рассеяния, то эти частоты складываются арифметически, откуда и следует формула (22). На рисунке показаны зависимости подвижности от температуры для различных механизмов рассеяния и результирующая подвижность.

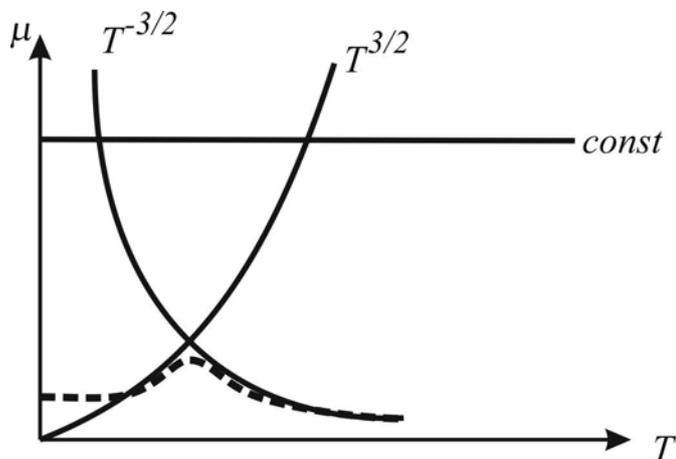


Рис.4 Зависимости подвижностей для различных механизмов рассеяния [1]

Температурная зависимость проводимости

Теперь, зная как зависят от температуры концентрация и подвижность носителей заряда, легко рассчитать температурную зависимость проводимости при помощи формулы (21). Необходимо перемножить графики рисунков 2 и 4. При низких температурах и неполной ионизации примесей концентрация зависит от обратной температуры по экспоненциальному закону (19), а подвижность - по степенному, т.е. температурная зависимость концентрации сильнее, и она определяет температурную зависимость проводимости:

$$\sigma = \sigma_d \exp(-\Delta W_d / 2kT). \quad (23)$$

Здесь σ_d содержит степенную зависимость подвижности и эффективной плотности состояний от температуры.

В области истощения примесей концентрация не зависит от температуры, поэтому температурная зависимость проводимости определяется степенной зависимостью подвижности от температуры. И, наконец, при больших температурах зависимость проводимости от обратной температуры экспоненциальная, т.к. $\mu \sim T^{-3/2}$, а $N_c \sim T^{3/2}$:

$$\sigma = \sigma_c \exp(-W_g / 2kT)$$

На рисунке 5 показана зависимость $\ln \sigma$ от обратной температуры при различных уровнях легирования полупроводника. По экспериментально измеренным зависимостям $\sigma(T)$, аналогичным рисунку 5, можно находить ширину запрещенной зоны и энергию активации примесей.

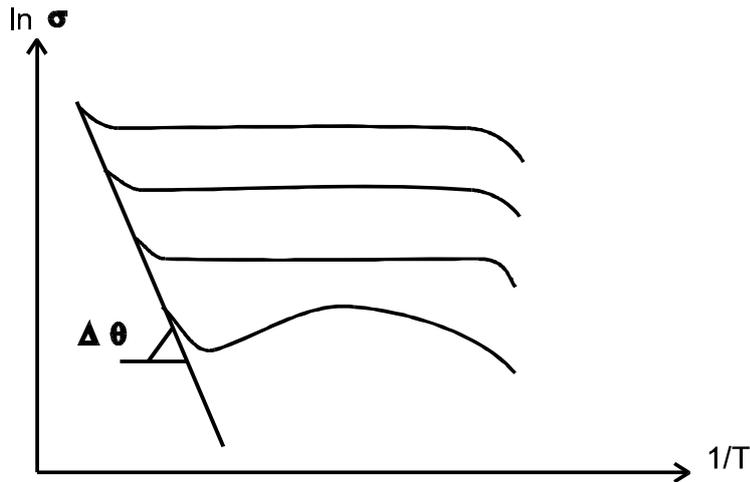


Рис. 5 Зависимость проводимости полупроводника от температуры [1]

2.5.2. ПОВЕДЕНИЕ НОСИТЕЛЕЙ ЗАРЯДА В СИЛЬНОМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

Стационарная дрейфовая скорость

Скорость носителя заряда с энергией $W(\vec{k})$ определяется структурой энергетической зоны в полупроводнике

$$\vec{v} = \hbar^{-1} \partial W(\vec{k}) / \partial \vec{k}. \quad (24)$$

Чтобы найти среднюю по ансамблю дрейфовую скорость v_d в электрическом поле \vec{E} , необходимо найти функцию распределения частиц по импульсам $f(\vec{k}, \vec{r}, t)$ путем решения *кинетического уравнения Больцмана*:

$$\partial f / \partial t + \bar{v} \mathcal{D} f / \partial \bar{r} + q \bar{E} \mathcal{D} f / \partial \bar{k} = \int_{\bar{k}'} d\bar{k}' [f(\bar{k}') \lambda(\bar{k}', \bar{k}) - f(\bar{k}) \lambda(\bar{k}, \bar{k}')], \quad (25)$$

где $\lambda(\bar{k}, \bar{k}') = \sum_t \lambda_t(\bar{k}, \bar{k}')$ — суммарная вероятность рассеяния электрона в импульсном пространстве из состояния \bar{k} в состояние \bar{k}' , $\lambda(\bar{k}', \bar{k})$ — из состояния \bar{k}' в состояние \bar{k} , $\int_{\bar{k}'} d\bar{k}' [f(\bar{k}') \lambda(\bar{k}', \bar{k}) - f(\bar{k}) \lambda(\bar{k}, \bar{k}')]$ — так называемый, интеграл столкновений, q — абсолютная величина заряда электрона.

В стационарном случае для однородного по объему распределения электронов уравнение (25) упрощается, так как исчезают производные по времени и пространству.

Нахождение функции распределения позволяет определить макроскопические величины такие, как плотность тока

$$\vec{j}(\bar{r}, t) = \frac{q}{4\pi^3} \int \bar{v}(\bar{k}) f(\bar{k}, \bar{r}, t) d\bar{k}, \quad (26)$$

дрейфовая скорость
$$\bar{v}_d(\bar{r}, t) = \frac{\vec{j}(\bar{r}, t)}{qn(\bar{r}, t)}, \quad (27)$$

концентрация носителей
$$n(\bar{r}, t) = \frac{1}{4\pi^3} \int f(\bar{k}, \bar{r}, t) d\bar{k}, \quad (28)$$

и средняя энергия
$$W(\bar{r}, t) = \int W(\bar{k}) f(\bar{k}, \bar{r}, t) d\bar{k} / n(\bar{r}, t). \quad (29)$$

Аналитическое решение уравнения Больцмана (25) удастся лишь для некоторых специальных случаев, например, когда неравновесная функция распределения в электрическом поле отличается от равновесной малым приращением. Практически для решения уравнения (25) используются в основном два метода: 1) прямой метод итерации, 2) непрямой метод моделирования движе-

ния электрона в \vec{k}, \vec{r}, t пространстве с использованием процедуры Монте-Карло. Второй метод в последние годы очень успешно применяется для решения задач транспорта электронов в сложных полупроводниковых структурах. Ниже мы будем использовать эти решения при анализе работы сверхбыстродействующих транзисторов.

Для качественной и наглядной оценки изменения дрейфовой скорости и средней энергии электронов в однородно легированном полупроводнике в сильных электрических полях применяются уравнения баланса усредненных импульса $m\bar{v}_d$ и энергии \bar{W}

$$dm(\bar{W})v_d/dt = qE - m(\bar{W})v_d/\tau_p(\bar{W}), \quad (30)$$

$$d\bar{W}/dt = qEv_d - (\bar{W} - W_0)/\tau_W(\bar{W}), \quad (31)$$

где $W_0 = 3kT_0/2$ — средняя тепловая энергия электронов в отсутствие электрического поля, $v_d \equiv \langle v \rangle$, а $\tau_p(\bar{W})$ и $\tau_W(\bar{W})$ — времена релаксации импульса и энергии, соответственно. Заметим, что уравнения баланса (30), (31) являются одним из приближений уравнения Больцмана (25), по которому столкновительный интеграл удается записать через время релаксации. В стационарном состоянии $dmv_d/dt = 0$, $d\bar{W}/dt = 0$, и уравнения (30) и (31) дают:

$$\tau_p(W_s) = mv_d/(qE), \quad (32)$$

$$\tau_W(\bar{W}_s) = (\bar{W}_s - E_0)/(qEv_{ds}), \quad (33)$$

где индекс s означает стационарное значение. Выражения (32) и (33) связывают времена релаксации со стационарными значениями скоростей и энергий. Ниже мы воспользуемся ими или так называемым приближением времен релаксации, чтобы оценить максимальные дрейфовые скорости и динамику их изменения во времени, а затем сравним эти результаты с точными расчетами методом Монте-Карло.

Время релаксации по импульсу, как правило, много короче времени релаксации по энергии, а средняя частота столкновений носителя заряда с центрами рассеяния в кристалле определяется обратной τ_p величиной. Дрейфовая скорость электронов (и дырок), согласно (32)

$$v_d = q \tau_p E / m(\bar{W}) \equiv \mu E, \quad (34)$$

где $\mu = q \tau_p(\bar{W}) / m(\bar{W})$ — подвижность носителей заряда. Зависимость подвижности от напряженности электрического поля определяется, как видим, соответствующей зависимостью времени релаксации импульса. Величину $\tau_p(\bar{W})$ можно найти из экспериментальных вольтамперных характеристик (ВАХ) полупроводника, по которым обычно определяется зависимость $v_d(E)$.

На рисунке 6 приведены экспериментальные зависимости дрейфовой скорости электронов и дырок в кремнии от напряженности поля. Для электронов в GaAs, InP, InSb, InAs, AlGaAs, GaInAs, CdTe аналогичная зависимость изображена на рисунке 7.

Во всех этих полупроводниках дрейфовая скорость растет с увеличением поля лишь до некоторых максимальных значений, а затем либо насыщается, либо даже уменьшается. Характер зависимости $v_d(E)$ определяется как структурой зоны проводимости полупроводника (в табл. 2 приведены параметры зоны основных полупроводников), так и механизмами рассеяния. Остановимся на причинах ограничения величины дрейфовой скорости.

Рис. 6. Зависимость дрейфовой скорости носителей заряда от напряженности электрического поля для кремния *n*-типа (кривые 1 - 4) и *p*-типа (кривая 5). Концентрация ионизированных примесей в *n*-Si: 1- $N_I=0$, 2- 10^{16} , 3- 10^{17} , 4- 10^{18} см^{-3}

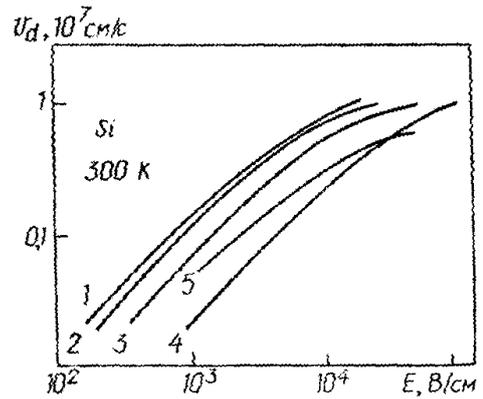


Рис. 7. Зависимость дрейфовой скорости электронов от напряженности электрического поля для некоторых полупроводниковых соединений по данным различных авторов [2-7]. На всех рисунках сплошные кривые соответствуют расчетам, точки или штриховые кривые - эксперименту

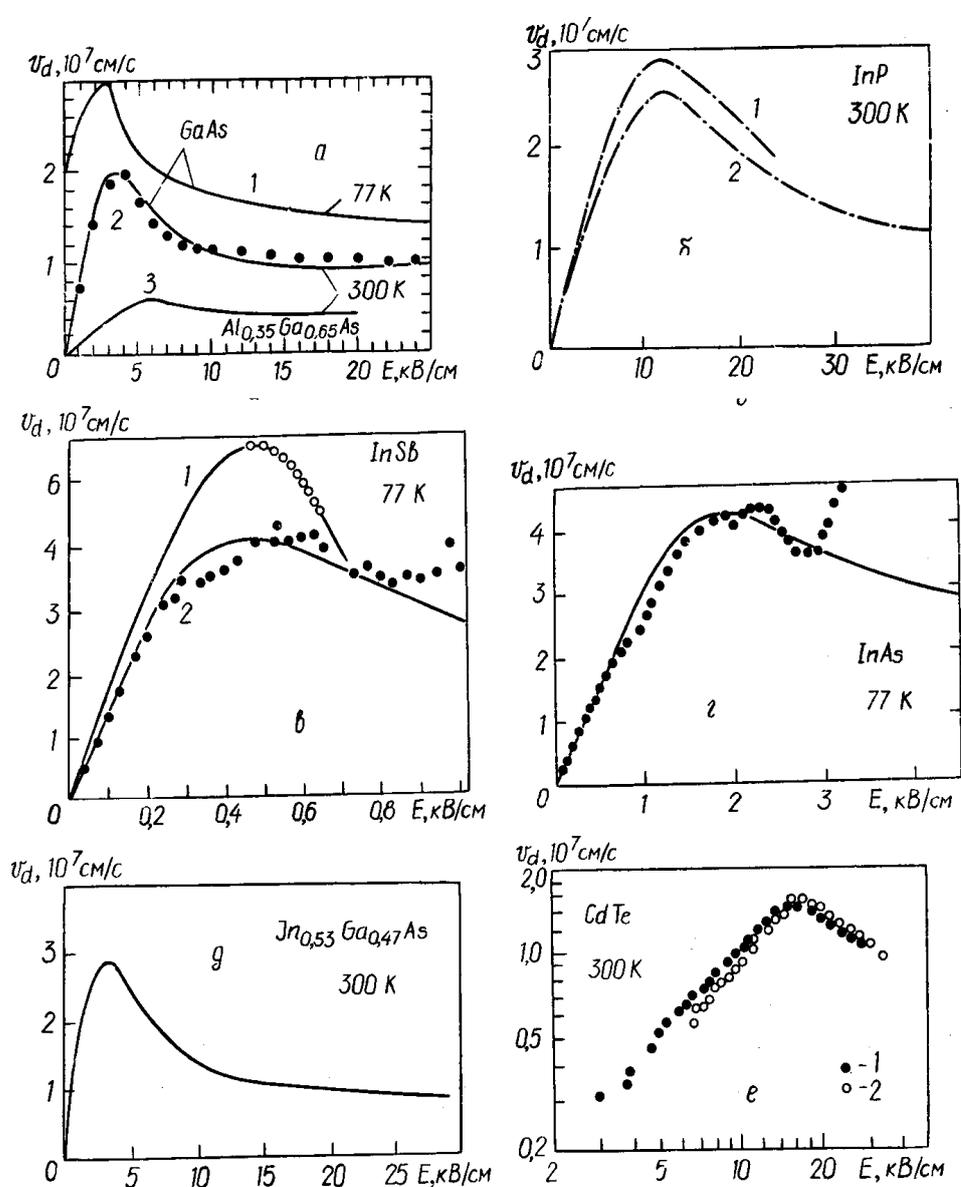


Таблица 2. Некоторые значения параметров полупроводников с кубической структурой решетки [2-5].

Полупроводник	E_{Γ} , эВ	E_L , эВ	E_{Δ^*} , эВ	E_{SO}^{**} , эВ	$\hbar\omega_0^{***}$, эВ	Эффективные массы электронов			Эффективные массы дырок	
						m_{\parallel}	m	m_{\perp}	m_{hh}	m_{lh}
Si	4,08	1,87	1,13	0,04	0,060	0,98	—	0,19	0,53	0,16
Ge	0,89	0,76	0,96	0,29	0,037	1,64	—	0,082	0,35	0,043
GaAs	1,42	1,71	1,90	0,34	0,0362	—	0,067	—	0,62	0,074
InP	1,26	2,0	2,3	0,13	0,0435	—	0,080	—	0,85	0,089
InSb	0,17	1,5	2,0	0,81	0,025	—	0,014	—	0,47	0,015
InAs	0,35	1,45	2,14	0,38	—	—	0,023	—	0,6	0,027

Полупроводник	μ_n , см ² /(В·с)		μ_p , см ² /(В·с)		$v_{d \text{ макс}}$, 10 ⁷ см/с (из рис. 3.2)
	300 К	77 К	300 К	77 К	
Si	1300	45500	500	11600	~1,0 (300 К)
Ge	3800	37100	1820	43700	
GaAs	8500	21000	420	4200	~2,0 (300 К)
InP	4600	24000	150	1200	2,9 (300 К)
InSb	78000	12 · 10 ⁵	750	10000	~5,5 (77 К)
InAs	27000	—	450	—	~4,2 (77 К)
In _{0,53} Ga _{0,47} As	10000	13000— 17000	—	—	2,9 (300 К)

* E_{Δ} - энергия зоны проводимости в Δ точке симметрии;

** E_{SO} - энергия спин-орбитального отщепления в валентной зоне;

*** $\hbar\omega_0$ - энергия оптического фонона

В валентных полупроводниках, какими являются кремний и германий, основной причиной ограничения дрейфовой скорости является рассеяние на оптических фононах. В отличие от почти упругого рассеяния на акустических фононах, рассеяние на оптических фононах является резко неупругим и, более того, вероятность рассеяния на оптических фононах на порядок выше вероятности рассеяния на акустических фононах. Как только энергия электрона становится

выше энергии оптического фонона, частота рассеяния резко растет, а значит, время релаксации τ_p резко падает.

Резко неупругое рассеяние на оптических фононах ограничивает рост энергии электронов и приводит к насыщению дрейфовой скорости. Преимущественную роль рассеяния электронов и дырок на оптических фононах в Si подтверждают и детальные расчеты $v_d(E)$ и подвижности μ , проведенные методом Монте-Карло и дающие отличное согласие с экспериментальными данными (рисунок 8).

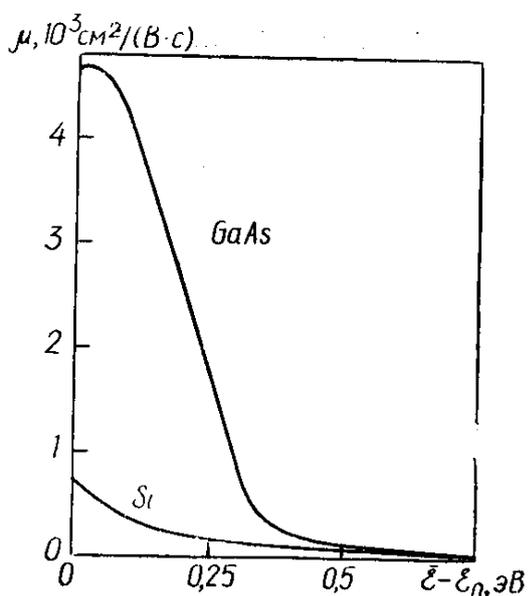


Рис. 8. Расчетные зависимости подвижности горячих электронов от разницы между средней и тепловой энергией в Si и GaAs при $T_0=293 \text{ K}$, $N_D=10^{17} \text{ cm}^{-3}$

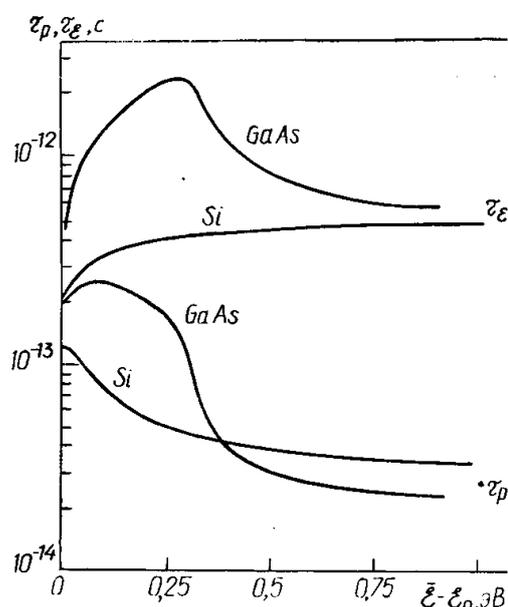


Рис. 9. Расчетные зависимости времен релаксации импульса τ_p и энергии τ_W от разницы между средней и тепловой энергией электрона $W-W_0$ в Si и GaAs при $T_0=293 \text{ K}$, $N_D=10^{17} \text{ cm}^{-3}$

Расчет методом Монте-Карло зависимостей $v_d(E)$, $W_s(E)$ и $m(W)$ позволяет получить из уравнений (31, 32) времена релаксации в зависимости от $\bar{W}_s - W_0$. Результаты таких расчетов для электронов в Si и GaAs при $T=293 \text{ K}$ приведены

на рисунке 9. Хорошо видно быстрое уменьшение τ_p , для Si с ростом энергии электрона. На рисунке 8 показаны также расчетные зависимости подвижности от средней неравновесной энергии электрона в Si и GaAs.

В случае GaAs зависимость $\nu_d(E)$ при 300 К вплоть до полей порядка 3 кВ/см почти линейна (рисунок 6). Это связано с тем, что GaAs является пьезоэлектрическим кристаллом и акустические волны (фононы) в нем сопровождаются образованием наряду с деформационным и пьезоэлектрического потенциала. Рассеяние на пьезоэлектрическом потенциале в отличие от деформационного, как было в Si, не растет, а уменьшается с ростом энергии электронов. Поэтому в GaAs среднее время релаксации τ_p , обусловленное суммарным рассеянием на деформационном и пьезоэлектрическом потенциалах, в области энергий вблизи и ниже оптических фононов слабо меняется с ростом неравновесной энергии (рисунок 9). Резкое увеличение частоты столкновений электронов при энергиях выше энергии оптических фононов компенсирует рост τ_p , однако существенное уменьшение τ_p подвижности электронов с дальнейшим ростом их энергий обусловлено двумя другими, дополняющими друг друга механизмами рассеяния: эффектом убегания и междолинным перебросом.

Междолинный переброс электрона из нижней Γ -долины в верхние L - и X -долины происходит, как только энергия электрона в Γ -долине достигает значений, близких к минимумам верхних долин [1-6]. Энергии минимума L -долины относительно минимума Γ -долины составляют $W_{\Gamma L} \approx 0,3\epsilon_e$, а X -долины $W_{\Gamma X} \approx 0,4\epsilon_e$. Центральная Γ -долина имеет большую кривизну по сравнению с боковыми L - и X -долинами, следовательно, эффективная масса меньше, а подвижность электронов в Γ -долине выше, чем в L и X . Вследствие большей эффективной массы плотность состояний в боковых долинах много выше, чем в центральной. Поэтому если электрон в Γ -долине имеет энергию вблизи или еще выше энергии боковых минимумов, то вероятность найти его в верхней долине

значительно больше, чем в Γ -долине. Это означает высокую вероятность междолинного перехода.

Междолинный переход происходит с участием оптических и акустических фононов с большим волновым числом, соответствующим разнице волновых чисел между центральной и соответствующей боковой долиной. Возможен и обратный переход из боковых в центральную долину. При этом электроны, перешедшие в Γ -долину, теряют в среднем направленную скорость, т. е. их дрейфовая скорость в момент перехода в среднем стремится к нулю, подобно тому, как это было в случае неупругого рассеяния на оптических фононах в Si. Это значит, что междолинный переброс из Γ -долины в боковые и обратно в GaAs может привести к насыщению дрейфовой скорости электронов Γ -долины.

Электронный перенос в коротких полупроводниковых структурах

Характерные размеры современных полупроводниковых приборов могут быть значительно меньше 1 мкм [2-5]. В таких условиях длина прибора может стать сравнимой со средней длиной свободного пробега носителей в полупроводнике, а время пролета может оказаться примерно равным или меньше среднего времени релаксации. В таких условиях не успевает установиться равновесное распределение, и средняя дрейфовая скорость электронов в активной области прибора может существенно превосходить значения насыщенной или даже максимальной скорости в длинных образцах. Это увеличение скорости за счет нестационарных эффектов получило название “эффекта всплеска скорости”. В предельном случае, когда можно полностью пренебречь столкновениями электронов с решеточными фононами и примесями, перенос электронов был назван “баллистическим”.

Начнем с рассмотрения электронного переноса в коротком приборе в слабом электрическом поле, хотя большинство практически работающих устройств используется в области сильных полей, когда энергия электронов может значительно превышать тепловую энергию. Но даже в слабом поле в

субмикронных структурах возникают интересные эффекты. Кроме того, анализ переноса в слабом поле позволяет ввести характерные масштабы, определяющие движение электронов в коротких структурах. Если размеры прибора значительно превосходят длину волны де Бройля (~ 26 нм в арсениде галлия при 330 К), движение электрона может быть описано квази-классическим уравнением движения. В этом случае электронный перенос определяется тремя характерными длинами: длиной прибора a , длиной свободного пробега λ и дебаевской длиной $L_D = (\epsilon kT / q^2 N_D)^{1/2}$ (рисунок 10). Если

$$a \gg \lambda, \quad (35)$$

то имеет место обычный, определяемый столкновениями перенос. В рассматриваемом здесь случае низких напряжений пространственное распределение носителей в образце является однородным, если выполняется условие

$$a \gg L_D, \quad (36)$$

которое эквивалентно условию

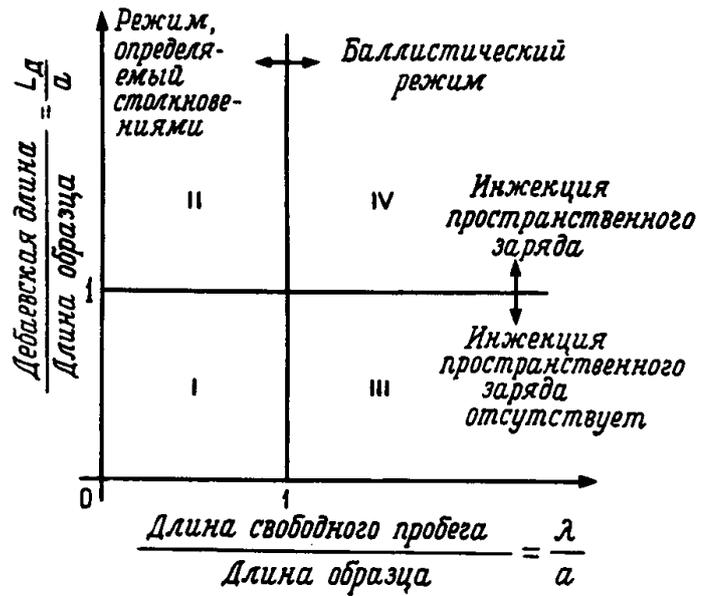
$$U_T \ll U_{p0} \quad (37)$$

где $U_T = kT/q$, а U_{p0} , равное

$$U_{p0} = qN_D a^2 / 2\epsilon\epsilon_0 \quad (38)$$

есть так называемое напряжение перекрытия. Здесь N_D -- концентрация примесей, которая считается однородной, $\epsilon\epsilon_0$ - диэлектрическая проницаемость.

Рис. 10. Классификация механизмов проводимости в зависимости от соотношения трех характерных длин [4]: длины образца a , длины свободного пробега λ и дебаевской длины L_D



Режим, определяемый неравенствами (35) и (36), соответствует области *I* на рисунке 10. Если $a \ll L_D$ и $a \gg \lambda$ то распределение носителей в образце не является однородным. Этот режим тока, ограниченного пространственным зарядом (ТОПЗ), в котором определяющую роль также играют столкновения, соответствует области *II* на рисунке 10. Если же справедливо противоположное условию (39) неравенство

$$a \ll \lambda, \tag{40}$$

то реализуется баллистический перенос (области *III* и *IV* на рисунке 10). Здесь также распределение носителей однородно при условии

$$L_D \ll a \tag{41}$$

(область *III* на рисунке 10) и неоднородно (ТОПЗ) при условии

$$L_D \gg a. \tag{42}$$

Вначале рассмотрим перенос электронов в слабых полях в однородном образце (области *I* и *III* на рисунке 10). Расчет позволяет проследить переход от

режима, в котором ток определяется столкновениями (омическая проводимость в длинном образце), к режиму бесстолкновительного переноса в очень коротком образце. Затем рассмотрим явления в образцах с неоднородным распределением носителей (области II и IV на рисунке 10).

Всплеск дрейфовой скорости

На отрезке времени t , короче времени между столкновениями τ_p электрон будет бесстолкновительно разгоняться до скорости

$$v_d = qEt / m , \quad t < \tau_p \quad (43)$$

В достаточно сильных электрических полях эта скорость может оказаться значительно выше максимальной дрейфовой скорости в стационарном состоянии. Поэтому картина изменения дрейфовой скорости во времени после мгновенного включения разгоняющего электрического поля будет носить характер короткого первоначального всплеска скорости, который затем затухает до величины стационарного значения.

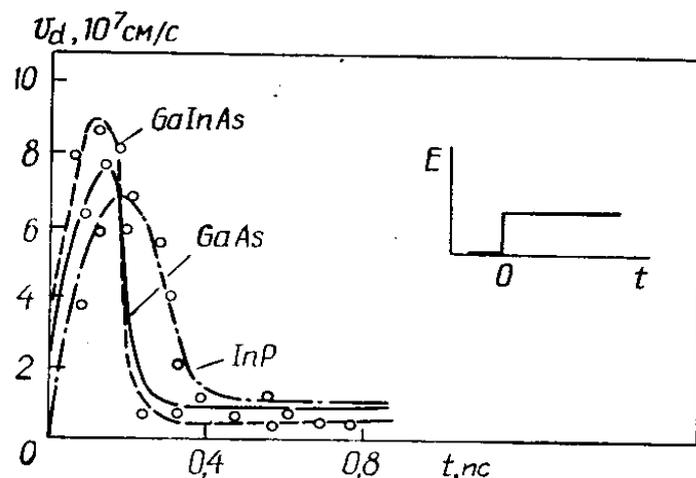
Эффект всплеска скорости может иметь место и на более длительном отрезке времени $\tau_p < t < \tau_W$. В основных полупроводниках (Si, GaAs) подвижность $\mu(E)$ падает с ростом средней энергии электронов. Поэтому в какой-то отрезок времени $t < \tau_W$, пока энергия электронов еще не достигла стационарного значения W_s , их подвижность будет выше стационарной, $\mu(W) > \mu(W_s)$, и, соответственно, дрейфовая скорость $v_d = \mu E$ будет иметь всплеск, даже в отсутствие бесстолкновительного ускорения.

В GaAs на динамике изменения дрейфовой скорости на коротких отрезках времени существенно проявляется эффект междолинного переброса (рис.11). Междолинный переброс существенно сказывается на эффекте всплеска скорости и в других полупроводниках. На рисунке 11 приведены зависимости $v_d(t)$

для GaInAs, InP и GaAs, полученные в приближении времени релаксации, которое дало результаты, совпадающие с расчетами Монте-Карло.

Как видим, эффект всплеска скорости позволяет получить максимальные дрейфовые скорости в полупроводниках, в несколько раз превышающие их стационарные значения. Порядок величины времен релаксации $\tau_p \approx 10^{-13}$ с, $\tau_E \approx 10^{-12}$ с позволяет предполагать, что наблюдаемые на ВАХ участки отрицательного дифференциального сопротивления сохранят свое значение до СВЧ-частот [2, 3, 9, 10]. Действительно, расчеты реальной части отрицательной дифференциальной подвижности для GaAs и InP показали, что она сохраняется до 100-500 ГГц в этих материалах.

Рис. 11. Изменение дрейфовой скорости электронов во времени после мгновенного включения электрического поля $E = 40$ кВ/см. Кривые соответствуют расчетам в приближении времени релаксации, точки - расчетам методом Монте-Карло



Всплеск дрейфовой скорости в коротких структурах

Как было показано выше, значительное увеличение дрейфовой скорости можно получить лишь на коротких отрезках времени. Если электроны пролетают активную область в структуре транзистора за столь короткий отрезок времени, то их средняя дрейфовая скорость в этой области окажется значительно выше стационарной. Легко оценить, что пролет области длиной 10^{-5} см произойдет за время порядка 10^{-12} с, если $v_d \approx 10^7$ см/с. Значит, всплеск дрейфовой скорости во времени оказывается достаточно длительным, чтобы привести в субмикронных структурах к всплеску скорости по пространственной координа-

те на всю толщину структуры. Если это транзисторная структура, то такой всплеск v_d в пространстве обеспечит повышение быстродействия и уменьшение задержки сигнала в транзисторе.

Всплеск скорости в пространстве - явление реально реализующееся в полупроводниковых структурах. Такой всплеск носит стационарный характер. Его возникновение не требует практически нереализуемого импульса поля с бесконечно крутым (субпикосекундным) фронтом. Скачок поля реализуется за счет неоднородности структуры полупроводника по координате.

Электроны при своем движении по полупроводнику, попадая в область крутого скачка поля, испытывают резкое изменение скорости и эффект ее всплеска.

Если поле после скачка остается постоянным на протяжении всего пролета электронов, то, считая в уравнениях баланса (41 и 42) τ_p константой до энергий W_{GL} междолинного рассеяния и $\tau_p \ll \tau_E$, получим для дистанции, проходимой электронами за время T , за которое электроны приобретают энергию, чуть меньшую W_{GL} ,

$$d_b = (v_0 \tau_p / \sqrt{2}) \left[T / \tau_p - (1 - e^{-T / \tau_p}) \right]^{1/2}, \quad (44)$$

где

$$v_0 = \hbar^{-1} (\partial W / \partial k)_{W=W_{GL}} \quad - \quad (45)$$

максимальная скорость, которую может достичь электрон прежде, чем испытает междолинное рассеяние. Для параболической зоны можно написать $mv_0^2/2 = W_{GL}$.

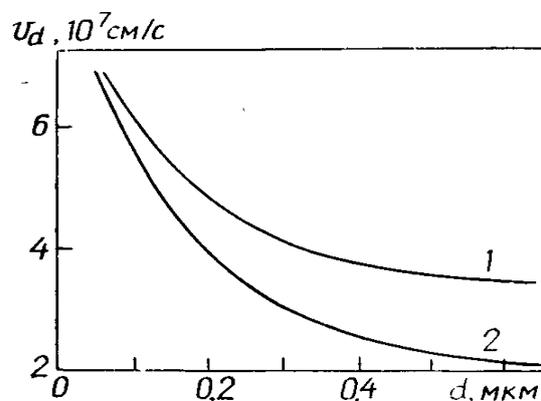
Средняя скорость, с которой электрон проходит дистанцию

$$d = \int_0^t v_d(t') dt' \quad (46)$$

$$v_d(d) = d / t \quad (47)$$

Если d - толщина активной части структуры прибора, то необходимо так подбирать T , т. е. значение поля E , чтобы $v_d(d)$ было максимально.

Рис. 12. Зависимости максимальных значений средней дрейфовой скорости от расстояния $v_d(d)$, рассчитанные методом Монте-Карло для GaAs для двух концентраций примеси [3, 9]: 1 - $N_d=0$; 2 - $3 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3}$. $T_0=293 \text{ К}$



На рисунке 12 приведены рассчитанные в максимальные значения $v_d(d)$ для GaAs. Как видим, на довольно больших длинах d величина $v_d(d)$ остается много больше максимального стационарного значения $v_{ds} \approx 2 \cdot 10^7 \text{ см/с}$.

Всплеск скорости в пространстве $v_d(x)$ можно определить из всплеска скорости во времени $v_d(t)$ с помощью уравнения

$$dx = v_d(t)dt . \quad (48)$$

Однако при рассмотрении всплеска $v_d(x)$ в пространстве проявляются новые факторы, учет которых существенно изменяет и делает отличной форму всплеска в пространстве от формы всплеска во времени. Такими факторами являются неоднородности концентрации, объемного заряда, средней энергии носителей заряда по координате. Их наличие приводит к возникновению диффузии носителей, диффузионному переносу тепла, термо-ЭДС и изменению конфигурации поля.

На рисунке 13 показана вычисленная методом Монте-Карло (с учетом диффузии, объемного заряда и других явлений, связанных с пространственной неоднородностью) зависимость всплеска дрейфовой скорости от координаты в

структуре типа $n^+ - i - n^+$. Хорошо видны изменения формы $v_d(x)$, $E(x)$, $n(x)$, обусловленные диффузионными эффектами. Существенно то, что картина всплеска $v_d(x)$ является стационарной. Поэтому связанные с эффектом всплеска такие явления, как увеличение тока нетрудно наблюдать экспериментально. Такие эксперименты со структурами типа $n^+ - n - n^+$ из GaAs были выполнены в работах.

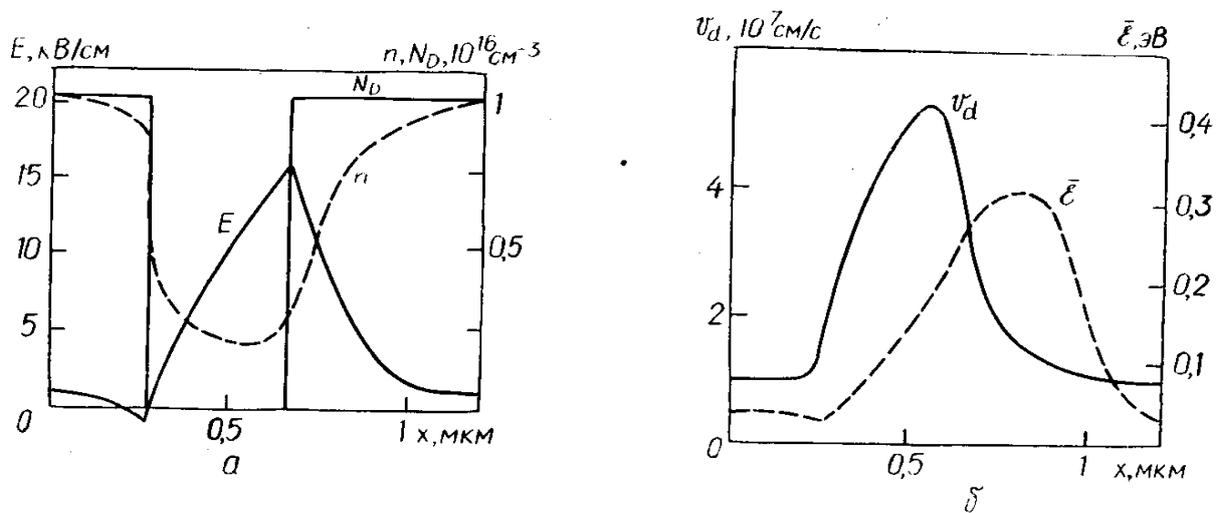
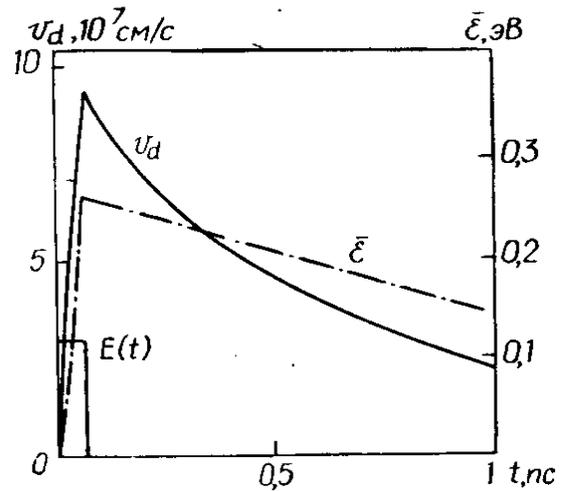


Рис. 13. Зависимости от координаты электрического поля E , концентрации примесей N_d и электронов n (а); дрейфовой скорости v_d и средней энергии E в $n^+ - i - n^+$ -структуре GaAs, рассчитанные методом Монте-Карло в условиях стационарности. Приложенное напряжение равно 0,5 В, $T_0 = 77$ К [2-5].

Баллистический пролет

В предыдущих параграфах мы рассматривали эффекты всплеска дрейфовой скорости в условиях постоянного электрического поля. Здесь рассмотрим движение электронов, ускоренных полем до высоких значений v_d только в самом начале своего движения, а затем по инерции баллистически пролетающих сквозь структуру [2-5]. На рисунке 14 показаны зависимости дрейфовой скорости и средней энергии баллистически летящего электрона от времени в GaAs.

Рис. 14 Зависимость дрейфовой скорости и средней энергии баллистически летящего электрона от времени в GaAs ($N_D=0$, $T_0=77\text{K}$). Амплитуда импульса приложенного электрического поля $E(t)=70$ кВ/см, продолжительность $\Delta t = 0,06\text{пс}$



Длина баллистического пролета может быть оценена из уравнений баланса (41, 42)

$$d_{\text{бал}} = d_0(1 - e^{-T/\tau_p}). \quad (49)$$

Здесь $d_0 = v_0\tau_p$, v_0 - скорость электрона, соответствующая междолинной энергии $W_{\text{ГЛ}}$, T - время разгона электрона до энергии $W_{\text{ГЛ}}$. При $T \ll \tau_p$, получаем

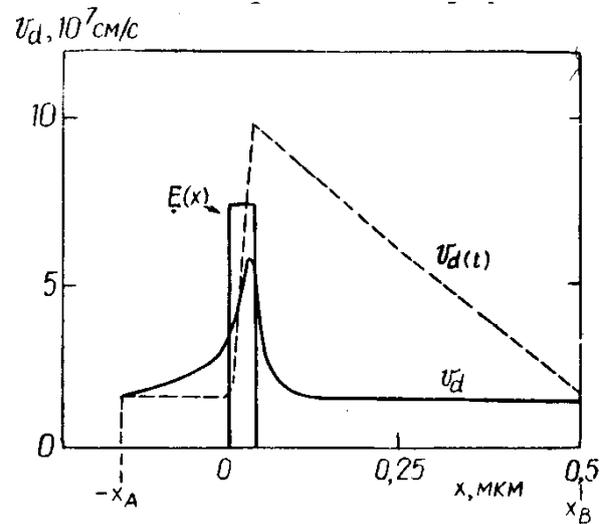
$$d_{\text{бал}} = v_0T, \quad (50)$$

что в два раза больше d_b , (44). Величина $d_{\text{бал}}$ определяет среднюю скорость баллистических электронов на этом отрезке $v_d(d) = d_{\text{бал}}/t$. На рисунке 15 приведена зависимость v_d от расстояния x в GaAs при двух способах ускорения до баллистической скорости: 1) с помощью короткого по времени импульса поля; 2) с помощью короткого в пространстве импульса поля. После воздействия коротким во времени импульсом поля $v_d(t)$ в соответствии с (50) линейно уменьшается с длиной баллистического пролета [3].

Единый гетеропереход является эффективным инжектором баллистических электронов с высокой начальной кинетической энергией, равной высоте

гетеробарьера φ . Начальный импульс электрона имеет ярко выраженную направленность. Компонента момента, параллельная плоскости гетероперехода p_{\parallel} при инжекции не меняется, а перпендикулярная p_{\perp} резко возрастает.

Рис. 15. Зависимости дрейфовой скорости электронов от расстояния в GaAs ($T_0=293$ К) при ускорении до баллистической скорости с помощью импульса, короткого по времени (штриховая кривая) и короткого в пространстве (сплошная кривая). Амплитуда поля E равна 70 кВ/см.



3. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ АНАЛИЗА РАБОТЫ ПОЛУПРОВОДНИКОВЫХ ПРИБОРОВ

3.1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Основные уравнения для анализа работы полупроводниковых приборов определяют статику и динамику поведения носителей тока в полупроводниках, которые находятся под действием внешних полей, обуславливающих соответствующие отклонения от равновесных условий. Их можно разделить на три группы: уравнения Максвелла, уравнения для плотности токов и уравнения непрерывности.

Уравнения Максвелла в совокупности с материальными уравнениями для однородных и изотропных сред:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (87)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J}_{cond} = \vec{J}_{tot}, \quad (88)$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho(x, y, z), \quad (89)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (90)$$

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}, \quad (91)$$

$$\vec{D}(r, t) = \int_{-\infty}^t \epsilon_s(t-t') \vec{E}(r, t') dt' \quad (92)$$

Здесь \vec{E} и \vec{D} - напряженности электрического поля и электрической индукции, \vec{H} и \vec{B} - магнитные поле и индукция, ϵ_s и μ_0 - диэлектрическая и магнитная проницаемости, $\rho(x, y, z)$ - объемная плотность полного электрического заряда, \vec{J}_{cond} - плотность тока проводимости, \vec{J}_{tot} - плотность полного

тока (состоящего из тока проводимости и тока смещения) ($\nabla \cdot \vec{J}_{tot} = 0$). Среди этих шести уравнений наиболее важным в практическом отношении является уравнение Пуассона (уравнение (89)), определяющее свойства обедненных слоев в p - n -переходах, структурах типа «металл-диэлектрик-полупроводник» и барьерах Шоттки.

Уравнения для плотности токов

$$\vec{J}_n = q\mu_n n \vec{E} + qD_n \nabla n, \quad (93)$$

$$\vec{J}_p = q\mu_p p \vec{E} - qD_p \nabla p, \quad (94)$$

$$\vec{J}_{cond} = \vec{J}_n + \vec{J}_p, \quad (95)$$

Здесь \vec{J}_n и \vec{J}_p - плотности электронного и дырочного тока, состоящие из полевой и диффузионной (обусловленной градиентом концентрации) компонент. В невырожденных полупроводниках коэффициенты диффузии D_n и D_p связаны со значениями подвижностей μ_n и μ_p соотношением Эйнштейна $D_n = (kT/q)$

В одномерном случае уравнения (93) и (94) имеют вид

$$\vec{J}_n = q\mu_n n \vec{E} + qD_n \frac{\partial n}{\partial x} = q\mu_n \left(n \vec{E} + \frac{kT}{q} \frac{\partial n}{\partial x} \right), \quad (93a)$$

$$\vec{J}_p = q\mu_p p \vec{E} - qD_p \frac{\partial p}{\partial x} = q\mu_p \left(p \vec{E} - \frac{kT}{q} \frac{\partial p}{\partial x} \right), \quad (94a)$$

которые справедливы при не очень сильных электрических полях. При сильных полях в этих уравнениях следует заменить произведения $\mu_p \vec{E}$ и $\mu_n \vec{E}$ на соответствующие скорости насыщения v_s . Для полупроводников, находящихся во внешних магнитных полях, к правой части уравнений (93) и (94) нужно добавить слагаемые $J_{n\perp} \text{tg} \theta_n$ и $J_{p\perp} \text{tg} \theta_p$ соответственно, где $J_{n\perp}$ и $J_{p\perp}$ - компоненты плотности электронного и дырочного тока, перпендикулярные магнитному

полю, а $\operatorname{tg} \theta_n = q \mu_n n R_H |\vec{H}|$ ($\operatorname{tg} \theta_p = q \mu_p p R_H |\vec{H}|$). Напомним, что электронный холловский коэффициент R_H отрицателен, а дырочный R_H положителен.

Уравнения непрерывности:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = G_n - U_n + \frac{I}{q} \nabla \cdot \vec{J}_n, \quad (96)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = G_p - U_p + \frac{I}{q} \nabla \cdot \vec{J}_p, \quad (97)$$

где G_n к G_p - темп генерации электронов и дырок в единице объема ($\text{см}^{-3}/\text{с}$), вызываемой внешними воздействиями, такими, как оптическое возбуждение или ударная ионизация при сильных полях. Скорость рекомбинации электронов в полупроводнике p -типа здесь обозначена символом U_n . При малых уровнях инжекции, когда концентрация инжектированных носителей много меньше равновесной концентрации основных носителей тока. $U_n \approx (n_p - n_{p0})/\tau_n$, где n_p - концентрация неосновных носителей тока, n_{p0} - термодинамически равновесное значение этой концентрации, τ - время жизни неосновных носителей (электронов). Аналогичным образом в полупроводнике n -типа скорость рекомбинации дырок определяется через дырочное время жизни τ_p . Если электроны и дырки генерируются и рекомбинируют парами без прилипания или других аналогичных эффектов, то $\tau_n = \tau_p$. В одномерном случае в условиях малой инжекции уравнения (96) и (97) имеют вид

$$\frac{\partial n_p}{\partial t} = G_n - \frac{n_p - n_{p0}}{\tau_n} + n_p \mu_n \frac{\partial \vec{E}}{\partial x} + \mu_n \vec{E} \frac{\partial n_p}{\partial x} + D_n \frac{\partial^2 n_p}{\partial x^2}, \quad (96a)$$

$$\frac{\partial p_n}{\partial t} = G_p - \frac{p_n - p_{n0}}{\tau_p} - p_n \mu_p \frac{\partial E}{\partial x} - \mu_p E \frac{\partial p_n}{\partial x} + D_p \frac{\partial^2 p_n}{\partial x^2}, \quad (97a)$$

3.2. ПРИМЕРЫ ПРИМЕНЕНИЯ ОСНОВНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЗАДАЧАХ РАДИАЦИОННОЙ ФИЗИКИ

Релаксация фотовозбужденных носителей

Рассмотрим образец n -типа, освещаемый так, что свет генерирует электронно-дырочные пары равномерно по его объему (рисунок 16, *a*), При $E = 0$ и $\partial p_n / \partial x = 0$ уравнение (97a) имеет вид

$$\frac{\partial p_n}{\partial t} = G_p - \frac{p_n - p_{n0}}{\tau_p}, \quad (98)$$

В стационарных условиях $\partial p_n / \partial t = 0$ и

$$p_n = p_{n0} + \tau_p G = const \quad (99)$$

Пусть в некоторый момент времени, например при $t=0$, освещение выключается. В последующие моменты времени ($t>0$) концентрация определяется уравнением

$$\frac{\partial p_n}{\partial t} = -\frac{p_n - p_{n0}}{\tau_p}, \quad (100)$$

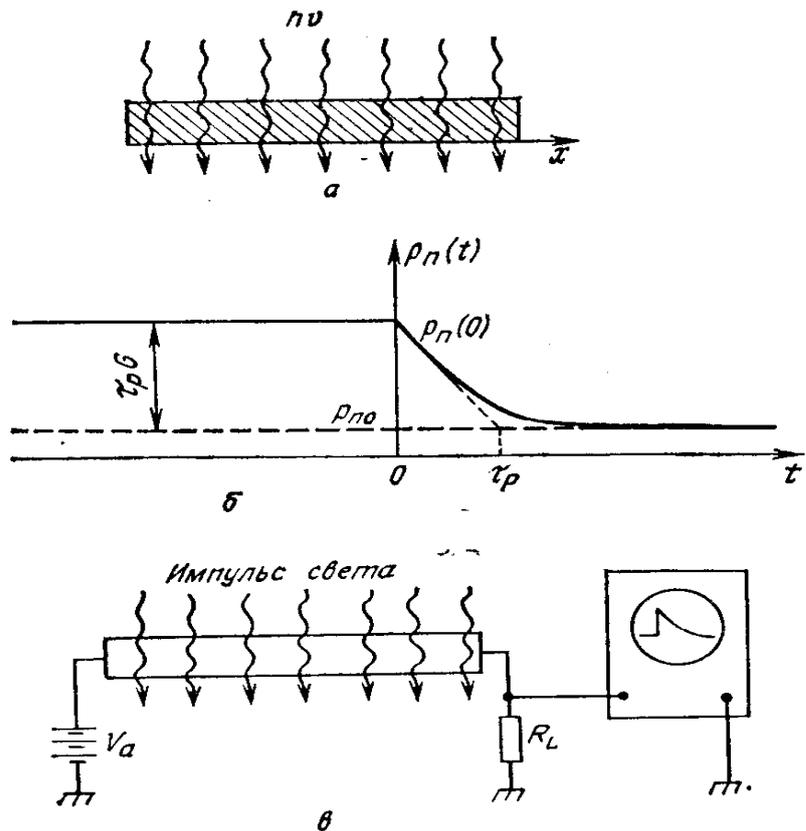
которое нужно решить с начальным условием $p_n(0) = p_{n0} + \tau_p G$ (выражение (99)).

Это решение

$$p_n(t) = p_{n0} + \tau_p G e^{-t/\tau_p}, \quad (101)$$

показано на рисунке 16, *б*.

Рис. 16. Релаксация фотовозбужденных носителей [2, 7]: *a* - образец *n*-типа при постоянном освещении; *б* - зависимость концентрации неосновных носителей (дырков) от времени; *в* - схема эксперимента для определения времени жизни неосновных носителей [2].



Рассмотренный пример лежит в основе метода измерения времени жизни неосновных носителей. Соответствующая экспериментальная установка схематически изображена на рисунке 19, *в*. Избыточные носители здесь генерируются однородно в образце короткими световыми импульсами. Если по образцу пропускается постоянный ток, появление фотоносителей вызывает соответствующее уменьшение падения напряжения на образце. Наблюдая релаксацию фотопроводимости в промежутке между возбуждающими импульсами на осциллографе, определяют время жизни τ (длительность световых импульсов при этом должна быть много меньше τ).

Стационарная инжекция с одной стороны образца.

На рисунке 20, *a* рассмотрен пример, когда избыточные носители инжектируются с одной стороны образца, например при освещении коротковолновым светом, который генерирует электронно-дырочные пары в тонком приповерх-

ностном слое [2, 8-10]. Например, для фотонов с $h\nu = 3,5$ эВ $a = 10^6$ см⁻¹, т. е. интенсивность такого излучения ослабляется в e раз в приповерхностном слое с толщиной 100 А, где и генерируются в основном избыточные носители тока.

В стационарных условиях $\left(\frac{\partial p_n}{\partial t} = 0\right)$ поверхностная генерация приводит к возникновению градиента концентрации неосновных носителей в приповерхностной области образца [2]. При этом уравнение (97а) принимает вид

$$-\frac{p_n - p_{n0}}{\tau_p} + D_p \frac{\partial^2 p_n}{\partial x^2} = 0, \quad (102)$$

Его решение, удовлетворяющее граничным условиям $p_n(x=0) = p_n(0)$ и $p_n(x \rightarrow \infty) = p_{n0}$ имеет вид (рисунок 17, а)

$$p_n(x) = p_{n0} + [p_n(0) - p_{n0}]e^{-x/L_p}, \quad (103)$$

где $L_p \equiv \sqrt{D_p \tau_p}$ - диффузионная длина неосновных носителей. В чистых образцах Ge и Si диффузионные длины L_p и $L_n \equiv \sqrt{D_n \tau_n}$ достигают значений порядка 1 см, а в GaAs $L_{\text{макс}} \approx 10^{-2}$ см.

Изменим теперь второе граничное условие, полагая, что все избыточные носители удаляются из образца при $x = W$, т. е. $p_n(W) = p_{n0}$. В этом случае решением уравнения (102) является функция (рисунок 17, б)

$$p_n(x) = p_{n0} + (p_n(0) - p_{n0}) \frac{\operatorname{sh} \frac{W-x}{L_p}}{\operatorname{sh} \frac{W}{L_p}}, \quad (104)$$

С помощью выражения (94а) можно рассчитать плотность дырочного тока при $x = W$:

$$J_p = -qD_p \left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_{x=W} = q(p_n(0) - p_{n0}) \frac{D_p}{L_p} \frac{1}{\operatorname{sh} \frac{W}{L_p}}, \quad (105)$$

Это выражение фактически определяет коэффициент усиления тока в биполярном транзисторе [2, 3].

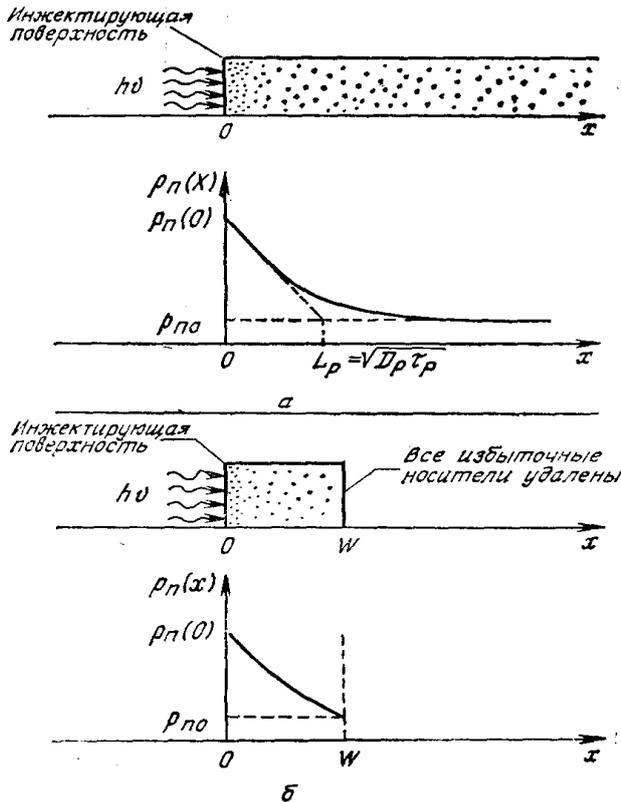


Рис. 17. Стационарная инжекция с одной стороны образца: а - полубесконечный образец; б - образец конечных размеров.

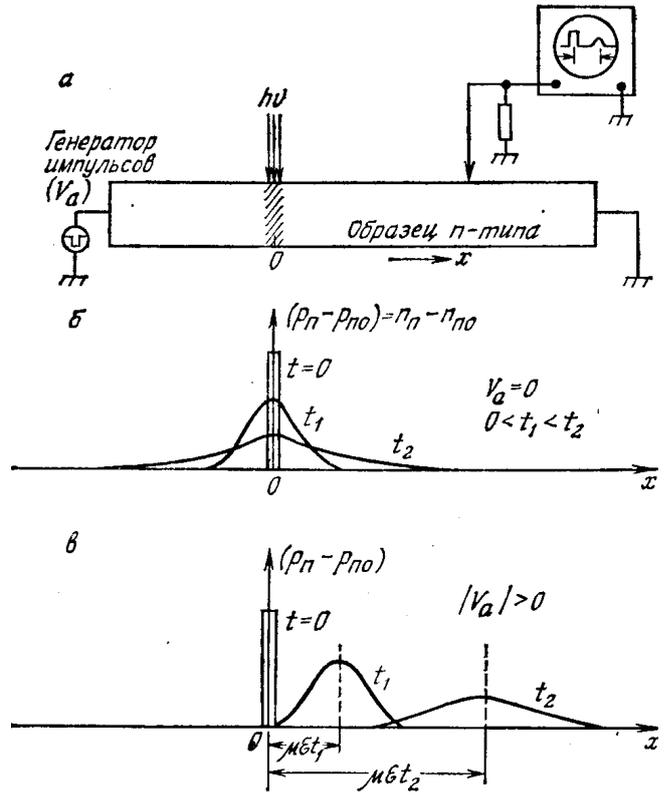


Рис. 18. Нестационарный процесс диффузионного «расплывания» локального «пакета» неосновных носителей: а - схема эксперимента; б - поле отсутствует; в - поле наложено

Стационарная и нестационарная диффузия

Рассмотрим теперь случай, когда избыточные носители генерируются узким импульсом света в локальном участке образца (рисунок 21, а). Распределение концентрации неравновесных дырок в образце по окончании возбуждающего светового импульса ($G = 0$) определяется уравнением

$$\frac{\partial p_n}{\partial t} = -\frac{p_n - p_{n0}}{\tau_p} - \mu_p \bar{E} \frac{\partial p_n}{\partial x} + D_p \frac{\partial^2 p_n}{\partial x^2}, \quad (106)$$

которое следует из уравнения (97а) в предположении, что электрическое поле в образце однородно ($\frac{\partial \bar{E}}{\partial x} = 0$). В отсутствие внешнего поля ($E=0$) решение уравнения (106), удовлетворяющее этим “импульсным” начальным условиям, имеет вид

$$p_n(x, t) = \frac{N}{\sqrt{4\pi D_p t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4D_p t} - \frac{t}{\tau_p}\right) + p_{n0}, \quad (107)$$

где N - полное число избыточных неосновных носителей, генерированных световым импульсом, на единицу площади поперечного сечения образца. Из рисунка 18, б видно, что неосновные носители диффундируют от точки инжекции и при этом рекомбинируют.

Для образца во внешнем электрическом поле в выражении (107) x следует заменить на $x - \mu_p Et$. Характер такого решения показан на рисунке 18, в. В этом случае первоначально узкий “пакет” неосновных носителей диффузионно расплывается и рекомбинирует, одновременно смещаясь во внешнем электрическом поле к отрицательному контакту образца с дрейфовой скоростью $\mu_p E$. Рассмотренный пример представляет собой известный эксперимент Хайнса -- Шокли по измерению дрейфовой подвижности в полупроводниках. Зная длину образца и приложенное электрическое поле и измерив время задержки между инжектирующим импульсом и детектированным импульсом, можно легко определять подвижность $\mu = x / Et$.

Поверхностная рекомбинация

При учете поверхностной рекомбинации граничное условие на поверхности образца ($x = 0$) имеет вид

$$qD_n \left. \frac{\partial p_n}{\partial x} \right|_{x=0} = qS_p (p_n(0) - p_{n0}). \quad (108)$$

Это означает, что число рекомбинирующих на единице площади поверхности кристалла неосновных носителей пропорционально отклонению их концентрации на этой границе от равновесного значения p_{n0} . Коэффициент пропорциональности S_p имеет размерность скорости и называется скоростью поверхностной рекомбинации. Распределение концентрации неосновных носителей в однородно освещенном образце определяется уравнением непрерывности (стационарное освещение):

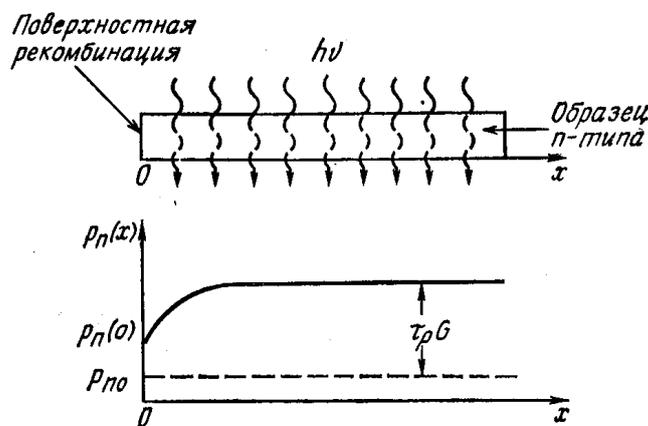
$$G - \frac{p_n - p_{n0}}{\tau_p} + D_p \frac{\partial^2 p_n}{\partial x^2} = 0. \quad (109)$$

Пренебрегая взаимодействием границ, в качестве второго граничного условия при $x \rightarrow \infty$ используем выражение (99). Решение уравнения (109), удовлетворяющее указанным граничным условиям, имеет вид:

$$p_n(x) = p_{n0} + \tau_p G \left[1 - \frac{\tau_p S_p \exp(-x/L_p)}{L_p + \tau_p S_p} \right]. \quad (110)$$

Его характер иллюстрирует график на рисунке 19.

Рис. 19. Распределение неосновных носителей вблизи границы образца при учете поверхностной рекомбинации.



При $S_p \rightarrow 0$ концентрация дырок однородна по длине образца ($p_n(x) \rightarrow p_{n0} + \tau_p G$); при $S_p \rightarrow \infty$ $p_n(x) \rightarrow p_n + \tau_p G [1 - \exp(-x/L_p)]$, т. е. концентрация неосновных носителей на границе образца вне зависимости от интенсивности освещения остается равной термодинамически равновесному значению p_{n0} . По аналогии с рекомбинационным процессом в объеме полупроводника, где при малых уровнях инжекции обратное время жизни неосновных носителей τ^{-1} равно $\sigma_p v_{th} N_t$, скорость поверхностной рекомбинации определяется выражением

$$S_p = \sigma_p v_{th} N_{st}, \quad (111)$$

где N_{st} - число поверхностных рекомбинационных центров на единицу площади границы кристалла.

4. МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЕРЕНОСА НОСИТЕЛЕЙ ЗАРЯДА В ПОЛУПРОВОДНИКАХ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ КВАНТОВ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

4.1 ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Материал, содержащийся в данном разделе создан на основе публикаций [12-33]. Под квантами высоких энергий в радиационной физике твердого тела в широком смысле понимают электромагнитное излучение, длина волны которого меньше межатомного расстояния ($a \approx 10^{-8}$ см). Указанное значение дает нижний предел энергии квантов высоких энергий порядка десятков килоэлектрон-вольт, что как минимум на 4 порядка больше ширины запрещенной зоны полупроводников. Это обуславливает то обстоятельство, что высокоэнергетическое излучение является косвенно ионизирующим. При первичном акте взаимодействия высокоэнергетического кванта с полупроводником образуются быстрые электроны с максимальной начальной энергией равной энергии высокоэнергетического кванта. В процессе своего движения быстрые электроны возмущают электронную плазму в объеме твердого тела, приводя ее к осцилляциям, то есть генерации объемных плазмонов. Характерную энергию объемного плазмона можно оценить по модели почти свободных электронов как

$$E_p = \hbar\omega_p = \hbar q \sqrt{\frac{n}{m\varepsilon_0}},$$

где n – концентрация электронной плазмы, q – элементарный заряд, m – масса электрона и ε_0 – диэлектрическая проницаемость вакуума. Для большинства твердых тел энергия объемного плазмона лежит в пределах десятков электрон-вольт.

Объемный плазмон распадается на одну или несколько электронно-дырочных пар за время порядка 10^{-15} с. Процесс выравнивания температуры электронно-дырочной плазмы происходит за несколько электрон-электронных

(и дырочно-дырочных, соответственно) взаимодействий за время порядка 10^{-14} с. Общая термализация, то есть процесс выравнивания температуры носителей и кристаллической решетки происходит за счет взаимодействия с фононами за время порядка 10^{-12} с.

Из вышеизложенного механизма ясно, что средняя энергия образования электронно-дырочной пары при воздействии квантов высоких энергий или непосредственно быстрых электронов должна быть существенно больше минимально возможной, равной ширине запрещенной зоны полупроводника. Действительно, подбор зависимости на основе экспериментальных результатов приводит к формуле

$$E_{e-h}(\text{эВ}) = 2,67C_g(\text{эВ}) + 0,87. \quad (112)$$

Эта зависимость представлена на рисунке 20. Отношение энергии поглощенных квантов высоких энергий к массе вещества называется поглощенной дозой ионизирующего излучения и имеет размерность Дж/кг. Единицей измерения поглощенной дозы ионизирующего излучения в системе СИ является грей. Более употребительной является единица измерения рад (от английского radiation absorption dose – поглощенная доза радиации). Один грей (Гр) = 100 рад.

Мощность поглощенной дозы ионизирующего излучения P_γ измеряется в Гр/с или рад/с и связана с коэффициентом генерации электронно-дырочных пар как

$$G = g_0 P_\gamma, \quad (113)$$

где g_0 – постоянная радиационной генерации, связанная со средней энергией образования электронно-дырочной пары по формуле

$$g_0 = \frac{\rho}{E_{e-h}}, \quad (114)$$

Здесь ρ – плотность материала.

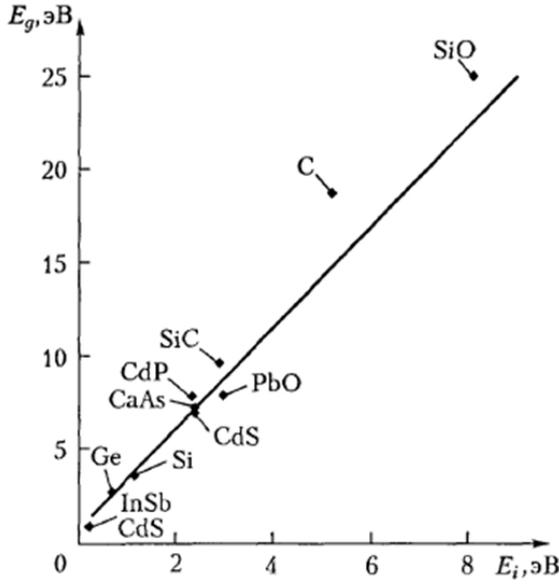


Рис. 20. Величина энергии образования электронно-дырочной пары и ее связь с шириной запрещенной зоны различных веществ. Прямая линия соответствует формуле 4.2

Для описания переноса носителей заряда рассмотрим квазигидродинамическое приближение в одномерном представлении:

$$\operatorname{div}(\varepsilon \nabla \varphi) = -\frac{q}{\varepsilon_0}(p - n + N_d - N_a), \quad (115)$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{1}{q} \operatorname{div}(j_n) - R + G, \quad (116)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{1}{q} \operatorname{div}(j_p) - R + G, \quad (117)$$

$$\frac{\partial(W_n n)}{\partial t} = \operatorname{div}(S_n) - j_n \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{n(W_n - W_0)}{\tau_{wn}(W_n)} - RW_n + GW_e, \quad (\text{доп.})$$

$$\frac{\partial(W_p p)}{\partial t} = \operatorname{div}(S_p) - j_p \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{p(W_p - W_0)}{\tau_{wp}(W_p)} - RW_p + GW_h, \quad (118)$$

$$j_n = -qn\mu_n \frac{\partial \varphi}{\partial x} + qD_n \frac{\partial n}{\partial x}, \quad (119)$$

$$j_p = -qp\mu_p \frac{\partial \varphi}{\partial x} - qD_p \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (120)$$

$$S_n = -W_n n \mu_n \frac{\partial \varphi}{\partial x} + D_n \frac{\partial(W_n n)}{\partial x}, \quad (121)$$

$$S_p = -W_p p \mu_p \frac{\partial \varphi}{\partial x} - D_p \frac{\partial(W_p p)}{\partial x}, \quad (122)$$

где φ – потенциал электрического поля, n – концентрация электронов; p – концентрация дырок, j_n – плотность электронного тока, j_p – плотность дырочного

тока, S_n – плотность потока энергии электронов, S_p – плотность потока энергии дырок, D_n – коэффициент диффузии электронов, D_p – коэффициент диффузии дырок, τ_{Wn} – время релаксации энергии электронов, τ_{Wp} – время релаксации энергии дырок, W_e – равновесная энергия носителей заряда, W_e – средняя энергия радиационно-генерируемых электронов, W_h – средняя энергия радиационно-генерируемых дырок, N_d – концентрация положительно заряженных ионов примеси, N_a – концентрация отрицательно заряженных ионов примеси, ϵ_0 – диэлектрическая проницаемость вакуума, ϵ – диэлектрическая проницаемость полупроводника, R – коэффициент рекомбинации, G – коэффициент генерации.

При построении численных алгоритмов удобно пользоваться системой уравнений переноса носителей заряда, приведенной к безразмерному виду. Это позволяет не только уменьшить мантиссы обрабатываемых чисел до приемлемых величин, пригодных для цифровой обработки, что особо актуально для вычислительных архитектур, использующих числа одинарной точности (например, технология параллельных вычислений CUDA корпорации NVidia), но также избавиться от некоторых постоянных размерных коэффициентов в уравнениях модели. Нормировочные коэффициенты приведены в таблице 3.

Таблица 3. Нормировка переменных уравнений переноса носителей заряда

Нормируемая величина	Условное обозначение	Нормировочный коэффициент
Пространство	x	x_0
Время	t	$t_0 = \frac{x_0^2}{\varphi_0 \mu_0}$
Подвижность	μ_n, μ_p	$\mu_0 = \max(\mu_n(x), \mu_p(x))$
Концентрация	n, p, N_d, N_a	$N_0 = \max(N_d(x), N_a(x))$
Потенциал	φ	$\varphi_0 = \frac{k_B T_0}{q}$

Плотность тока	j_n, j_p	$j_0 = \frac{q\mu_0 N_0 \varphi_0}{x_0}$
Энергия	W_n, W_p	$W_0 = \frac{3}{2} k_B T_0$
Плотность потока энергии	S_n, S_p	$S_0 = \frac{\mu_0 n_0 W_0 \varphi_0}{x_0}$

4.2. СВЕДЕНИЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ПЕРЕНОСА НОСИТЕЛЕЙ ЗАРЯДА

К ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ УРАВНЕНИЙ

Любая система дифференциальных уравнений в частных производных параболического и эллиптического типов, к числу которых относится семейство систем уравнений переноса носителей заряда в полупроводниках, может быть сведена к системе дифференциально-алгебраических уравнений вида

$$M \frac{du}{dt} = f(u, t) \quad (123)$$

путем дискретизации пространственной части уравнений в частных производных. В выражении (123) u – вектор нормированных искомых переменных, M – матрица массы, f – векторная функция нормированных пространственно-дискретизированных правых частей системы уравнений переноса носителей заряда, t – нормированное время.

В настоящее время применяются 3 метода пространственной дискретизации:

- конечных объемов (FVM);
- конечных элементов (FEM);
- конечных разностей (FDM).

Дискретизация определяется формой записи системы дифференциальных уравнений в частных производных: для дифференциальной формы записи дискретизация осуществляется при помощи конечно-разностных методов; интегральная форма записи дискретизируется при помощи метода конечных объемов, а вариационная форма – при помощи метода конечных элементов.

Методы дискретизации, их преимущества и недостатки, широко рассмотрены в литературе. Применительно к одномерной квазигидродинамической модели переноса носителей заряда, рассматриваемой ниже, явным преимуществом будет обладать метод конечных разностей. Основной акцент сделаем на дискретизации плотностей токов и потоков энергии носителей заряда. Поэтому без ущерба общности обсуждения дальнейших результатов исключим из системы (115)-(119) уравнения баланса импульса электронов и дырок, а также уравнение теплопроводности кристаллической решетки.

На отрезке $[0, 1]$ введем неравномерную пространственную сетку с узлами $x = \{x_i\}$, $i = 0, 1, \dots, N - 1$, согласованную с распределением легирующей примеси: вблизи границ раздела и контактов полупроводникового прибора шаг сетки делаем более мелким. Определим значения базисных функций $\{\varphi, n, p, W_n, W_p\}$ в следующем виде: $u = \{u_i\}$, $u_{5i} = \varphi_i$, $u_{5i+1} = n_i$, $u_{5i+2} = p_i$, $u_{5i+3} = (W_n)_i$, $u_{5i+4} = (W_p)_i$. Тогда векторная функция нормированных пространственно-дискретизированных правых частей системы уравнений переноса носителей заряда в квазигидродинамическом приближении записывается в виде

$$f_{5i} = \left(\frac{2\varepsilon_0\varphi_0}{qN_0L_0^2} \right) \frac{\varepsilon_{i+1/2} \frac{u_{5i+5} - u_{5i}}{x_{i+1} - x_i} - \varepsilon_{i-1/2} \frac{u_{5i} - u_{5i-5}}{x_i - x_{i-1}}}{x_{i+1} - x_{i-1}} + ((N_d)_i - (N_a)_i - u_{5i+1} + u_{5i}),$$

$$f_{5i+1} = 2 \frac{(j_n)_{i+1/2} - (j_n)_{i-1/2}}{x_{i+1} - x_{i-1}} - R_i + G_i,$$

$$f_{5i+2} = -2 \frac{(j_p)_{i+1/2} - (j_p)_{i-1/2}}{x_{i+1} - x_{i-1}} - R_i + G_i,$$
(124)

$$\begin{aligned}
f_{5i+3} &= \frac{1}{u_{5i+1}} \left(2 \frac{(S_n)_{i+1/2} - (S_n)_{i-1/2}}{x_{i+1} - x_{i-1}} + \frac{((j_n)_{i+1/2} + (j_n)_{i-1/2})(u_{5i-5} - u_{5i+5})}{x_{i+1} - x_{i-1}} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{u_{5i+1}(u_{5i+3} - 1)}{\tau_{Wn}} - R_i u_{5i+3} + G_i W_e - u_{5i+3} f_{5i+1} \right), \\
f_{5i+4} &= \frac{1}{u_{5i+2}} \left(-2 \frac{(S_p)_{i+1/2} - (S_p)_{i-1/2}}{x_{i+1} - x_{i-1}} + \frac{((j_p)_{i+1/2} + (j_p)_{i-1/2})(u_{5i-5} - u_{5i+5})}{x_{i+1} - x_{i-1}} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{u_{5i+2}(u_{5i+4} - 1)}{\tau_{Wp}} - R_i u_{5i+4} + G_i W_h - u_{5i+4} f_{5i+2} \right), \\
R_i &= (u_{3i+1} u_{3i+2} - n_i^2) \left(\frac{1}{\tau_p (u_{3i+1} + n_i) + \tau_n (u_{3i+2} + n_i)} + C_n u_{3i+1} + C_p u_{3i+2} \right),
\end{aligned}$$

а матрица массы становится диагональной с элементами $m_{5i,5i} = 0$, $m_{5i+1,5i+1} = 1$, $m_{5i+2,5i+2} = 1$, $m_{5i+3,5i+3} = 1$, $m_{5i+4,5i+4} = 1$.

Дискретные аналоги плотностей токов и потоков энергии электронов и дырок определяются в ячейках сетки на основе аппроксимации Шарфеттера-Гуммеля (SG), позволяющей сохранить монотонность численной схемы независимо от величины шага пространственной дискретизации и имеющей ряд особенностей для квазигидродинамического приближения:

$$\begin{aligned}
(j_n)_{i+1/2} &= \begin{cases} \frac{u_{5i+8} - u_{5i+3} + u_{5i} - u_{5i+5}}{x_{i+1} - x_i} \frac{((\mu_n)_{i+1} u_{5i+6} - (\mu_n)_i u_{5i+1}) \times h_n(u_{5i}, u_{5i+3}, u_{5i+5}, u_{5i+8})}{1 - h_n(u_{5i}, u_{5i+3}, u_{5i+5}, u_{5i+8})} & h_n(\dots) \neq 1 \\ \frac{(\mu_n)_{i+1} u_{5i+6} u_{5i+8} - (\mu_n)_i u_{5i+1} u_{5i+3}}{x_{i+1} - x_i} & h_n(\dots) = 1 \end{cases}, \\
(j_p)_{i+1/2} &= \begin{cases} \frac{u_{5i} - u_{5i+5} - u_{5i+9} + u_{5i+4}}{x_{i+1} - x_i} \frac{((\mu_p)_{i+1} u_{5i+7} - (\mu_p)_i u_{5i+2}) \times h_p(u_{5i}, u_{5i+4}, u_{5i+5}, u_{5i+9})}{1 - h_p(u_{5i}, u_{5i+4}, u_{5i+5}, u_{5i+9})} & h_p(\dots) \neq 1 \\ \frac{(\mu_p)_i u_{5i+2} u_{5i+4} - (\mu_p)_{i+1} u_{5i+7} u_{5i+9}}{x_{i+1} - x_i} & h_p(\dots) = 1 \end{cases}, \\
(S_n)_{i+1/2} &= \begin{cases} \frac{u_{5i+8} - u_{5i+3} + u_{5i} - u_{5i+5}}{x_{i+1} - x_i} \frac{((\mu_n)_{i+1} u_{5i+6} u_{5i+8} - (\mu_n)_i u_{5i+1} u_{5i+3}) \times h_n(u_{5i}, u_{5i+3}, u_{5i+5}, u_{5i+8})}{1 - h_n(u_{5i}, u_{5i+3}, u_{5i+5}, u_{5i+8})} & h_n(\dots) \neq 1 \\ \frac{(\mu_n)_{i+1} u_{5i+6} u_{5i+8}^2 - (\mu_n)_i u_{5i+1} u_{5i+3}^2}{x_{i+1} - x_i} & h_n(\dots) = 1 \end{cases},
\end{aligned} \tag{122}$$

$$(S_p)_{i+1/2} = \begin{cases} \frac{u_{5i} - u_{5i+5} - u_{5i+9} + u_{5i+4} \left((\mu_p)_{i+1} u_{5i+7} u_{5i+9} - (\mu_p)_i u_{5i+2} u_{5i+4} \times h_p(u_{5i}, u_{5i+4}, u_{5i+5}, u_{5i+9}) \right)}{x_{i+1} - x_i} & h_p(\dots) \neq 1 \\ \frac{(\mu_p)_i u_{5i+2} u_{5i+4}^2 - (\mu_p)_{i+1} u_{5i+7} u_{5i+9}^2}{x_{i+1} - x_i} & h_p(\dots) = 1 \end{cases}$$

$$h_n(u_{5i}, u_{5i+3}, u_{5i+5}, u_{5i+8}) = \exp\left(-2 \frac{u_{5i+8} - u_{5i+3} + u_{5i} - u_{5i+5}}{u_{5i+8} + u_{5i+3}}\right),$$

$$h_p(u_{5i}, u_{5i+4}, u_{5i+5}, u_{5i+9}) = \exp\left(2 \frac{u_{5i} - u_{5i+5} - u_{5i+9} + u_{5i+4}}{u_{5i+9} + u_{5i+4}}\right).$$

Отметим, что если положить равенство средних энергий электронов и дырок тепловой энергии носителей заряда в каждом узле расчетной сетки $u_{5i+3} \equiv u_{5i+4} \equiv 1$ и, следовательно, постоянные их подвижности $\mu_i \equiv \mu_{i+1} \equiv \mu_{i+1/2}$, то выражения для плотностей токов переходят в традиционный для диффузионно-дрейфовой модели вид

$$(j_n)_{i+1/2} = \begin{cases} (\mu_n)_{i+1/2} \frac{u_{5i} - u_{5i+5}}{x_{i+1} - x_i} \frac{(u_{5i+6} - u_{5i+1} \exp(u_{5i+5} - u_{5i}))}{1 - \exp(u_{5i+5} - u_{5i})} & u_{5i+5} \neq u_{5i} \\ (\mu_n)_{i+1/2} \frac{u_{5i+6} - u_{5i+1}}{x_{i+1} - x_i} & u_{5i+5} = u_{5i} \end{cases},$$

$$(j_p)_{i+1/2} = \begin{cases} (\mu_p)_{i+1/2} \frac{u_{5i} - u_{5i+5}}{x_{i+1} - x_i} \frac{(u_{5i+7} - u_{5i+2} \exp(u_{5i} - u_{5i+5}))}{1 - \exp(u_{5i} - u_{5i+5})} & u_{5i+5} \neq u_{5i} \\ (\mu_p)_{i+1/2} \frac{u_{5i+2} - u_{5i+7}}{x_{i+1} - x_i} & u_{5i+5} = u_{5i} \end{cases}.$$

(123)

4.3. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Любая гидродинамическая модель переноса носителей заряда в полупроводнике включает уравнение Пуассона, определяющее алгебраическую компоненту дискретизированной задачи. Матрица массы дифференциально-алгебраических уравнений является вырожденной, что определяет «бесконечную жесткость» задачи (120). При построении разностных схем для жестких систем предъявляются повышенные требования к устойчивости решения – явные схемы для решения жестких задач требуют очень мелкого шага интегрирования и поэтому практически неприменимы.

Неявные итерационные схемы

Среди неявных схем широко распространены методы Рунге-Кутты (IRK – implicit Runge-Kutta methods). Не все схемы Рунге-Кутты подходят для решения жестких задач. В монографии [19] дан всеобъемлющий обзор методов Рунге-Кутта, пригодных для решения жестких задач, выделены методы, являющиеся жестко точными, то есть сохраняющими при решении систем дифференциально-алгебраических уравнений тот же порядок точности, что и для систем дифференциальных уравнений.

Любой неявный метод Рунге-Кутты для перехода на новый временной слой требует решения системы нелинейных алгебраических уравнений при помощи итераций ньютоновского типа. Для s -стадийного неявного метода Рунге-Кутты минимальное число возникающих нелинейных систем s соответствует диагонально неявным методам (DIRK – diagonal implicit Runge-Kutta methods). Именно они чаще всего и используются на практике.

Многошаговые методы

Неявные многошаговые методы (формулы дифференцирования назад) положены в основу популярных программ Гира. Коэффициенты многошаговых методов подбираются так, чтобы q -шаговый метод имел точность $O(\tau^q)$. Однако

можно показать, что неявные многошаговые методы с $q > 2$ теряют свойство безусловной устойчивости. При $q > 6$ неявные многошаговые методы становятся абсолютно неустойчивыми. Этим неявные многошаговые методы сильно уступают неявным методам Кунге-Кутты. Тем не менее, неявные многошаговые методы первого и второго порядков (неявный метод Эйлера и неявное правило трапеций) реализованы в системе автоматизированного проектирования изделий микроэлектроники TCAD Sentaurus фирмы Synopsys для решения задачи переноса носителей заряда. Также на базе методов Гира реализован комплекс программ оценки радиационного воздействия на изделия микроэлектроники DIODE-2D разработки НИЯУ МИФИ.

Безитерационные схемы

Наличие итераций сильно усложняет использование неявных методов Рунге-Кутты и многошаговых методов, так как к проблемам устойчивости добавляется проблема сходимости итерационного процесса при решении систем нелинейных алгебраических уравнений. Альтернатива, которая обходит эту трудность – методы типа Розенброка (ROS) и Розенброка-Ваннера (ROW). Формально эти схемы неявные, но итераций в них не возникает и число арифметических действий для перехода на новый временной слой фиксировано и заранее известно (как в явных схемах). За это безусловное преимущество эти схемы получили название явно-неявных или полунявных.

Формулы перехода на новый временной слой однопараметрического семейства одностадийных схем Розенброка имеют вид:

$$\begin{aligned} \hat{u} &= u + \tau \operatorname{Re} k, \\ (M - \alpha \mathcal{F}'_u(u, t))k &= f(u, t + 0.5\tau), \end{aligned} \quad (124)$$

где $f'_u \equiv \frac{\partial f}{\partial u}$ – матрица Якоби, τ – шаг по времени, u – решение на текущем временном слое, \hat{u} – решение на новом временном слое, α – числовой параметр, определяющий свойства схемы. При $\alpha = 0$ это явная схема, имеющая точность

$O(\tau)$. Этот вариант схемы практически непригоден для расчета жестких задач. При $\alpha = 0,5$ получается известная схема «с полусуммой». Она имеет точность $O(\tau^2)$ и безусловно устойчива. При $\alpha = 1$ имеем неявный метод Эйлера. Помимо безусловной устойчивости он имеет хорошее качественное поведение численного решения (за счет L1-устойчивости). Однако неявный метод Эйлера имеет невысокую точность $O(\tau)$, что препятствует его применению.

Описанные выше схемы вещественны. Однако существует одна комплексная схема этого семейства с $\alpha = \frac{1+i}{2}$, которая обладает уникальными свойствами: точность $O(\tau^2)$, L2-устойчивость и, соответственно, безусловная устойчивость. Эта схема обладает высокой надежностью и пригодна для расчетов с сильной жесткостью. В литературе ее принято называть одностадийной схемой Розенброка с комплексным коэффициентом (CROS).

Качественно поведение одностадийной схемы Розенброка с комплексным коэффициентом можно описать следующим образом. Для дифференциальной подсистемы делается один шаг точности $O(\tau^2)$, а для алгебраической – одна ньютоновская итерация. Для получения точности $O(\tau^2)$ на дифференциальной подсистеме в правой части (14) необходимо использовать момент $t + 0,5\tau$. Однако если использовать этот момент в алгебраической подсистеме, то ньютоновские итерации сходятся именно к этому моменту, а не к нужному значению $t + \tau$. Поэтому для алгебраической подсистемы необходимо использовать в правой части (14) момент $t + \tau$, что обеспечивает общий второй порядок точности.

Выбор шага интегрирования является важной задачей. С одной стороны, шаг должен быть достаточно малым для того, чтобы обеспечивать заданную точность вычислений; с другой стороны – достаточно большим, чтобы избежать бесполезной вычислительной работы. Традиционным является метод уменьшения шага вдвое, который использовал еще Рунге в своих пионерских работах. Пусть u_2 результат последовательного расчета двух шагов τ , w – ре-

зультат расчета одного большого шага 2τ . Тогда норма погрешности err оценивается по формуле Ричардсона

$$err = \frac{1}{2^p - 1} \|u_2 - w\|. \quad (125)$$

Затем величина нормы погрешности сравнивается с заданной величиной допустимой погрешности tol , что позволяет вычислить оптимальный шаг как $\tau \left(\frac{tol}{err}\right)^{\frac{1}{p+1}}$. На практике, однако данное выражение обычно помножают на «гарантийный фактор» $fac < 1$ для предотвращения резких изменений шага интегрирования. В данной работе $fac = 0,25^{\frac{1}{p+1}}$ и выражение для нового шага интегрирования

$$\tau_{new} = \tau \left(\frac{1}{4} \frac{tol}{err}\right)^{\frac{1}{p+1}}. \quad (126)$$

Таким образом, если $err < tol$, два вычисленных шага считаются принятыми, и решение продолжается исходя из u_2 . В противном случае оба шага отбрасываются, и вычисления повторяются с шагом τ_{new} .

Использование параллельных вычислений

На основе вышеизложенного подхода написаны компьютерные программы решения системы уравнений переноса носителей заряда в полупроводнике в диффузионно-дрейфовом и квазигидродинамическом приближениях. На начальном этапе вычислительный алгоритм был реализован на центральном процессоре в однопоточном режиме. Анализ его производительности показал, что основное время вычислений тратится на решение системы линейных алгебраических уравнений (124). С ростом числа узлов расчетной сетки N время вычислений увеличивалось пропорционально N^3 .

Практика моделирования полупроводниковых приборов позволяет выделить следующие причины для применения расчетных сеток с большим числом узлов:

- наличие в современных приборах областей с резким изменением электрофизических параметров материала: гетеропереходов (скачек диэлектрической проницаемости), резких р-п-переходов (скачек уровня легирования) и т.п., приводит к тому, что имеет место скачок напряженности электрического поля, и, как следствие, резкое изменение электростатического потенциала, концентрации электронов и дырок и их средних энергий. Поэтому корректное моделирование переноса носителей заряда в таких областях возможно лишь при уменьшении шага пространственной дискретизации, что приводит к общему увеличению числа узлов расчетной сетки;
- уменьшение топологических норм изготовления активных элементов микросхем до значений менее 1 мкм повлекло за собой усиление взаимовлияния различных областей их топологии, что существенно изменяет и электрические характеристик элементов. Ранее этими эффектами можно было пренебречь без потери точности моделирования, но для корректного моделирования современных элементов необходимы двумерная и даже трехмерная постановки, а значит увеличение числа узлов расчетной сетки;
- внедрение приборов со сложной латеральной топологией, например, полевых транзисторов с V-образной канавкой затвора. В этом случае для построения корректной численной модели используется более сложная и мелкая сетка пространственной дискретизации уравнений, что обеспечивается увеличением числа ее узлов.

Также увеличение предельных рабочих частот полупроводниковых приборов и интегральных схем, обеспечиваемое сокращением размеров их рабочих областей, требует уменьшения временного шага интегрирования системы уравнений переноса носителей заряда при моделировании высокочастотных и переходных процессов.

Все вышеизложенные факторы приводят к увеличению времени расчета статических, высокочастотных и переходных характеристик перспективных полупроводниковых приборов и интегральных схем. Сокращение времени моделирования может быть достигнуто оптимизацией численного алгоритма решения системы дифференциально-алгебраических уравнений (120), применением высокопроизводительных ЭВМ и распараллеливанием вычислений, прежде всего, операций линейной алгебры.

В течение многих лет одним из основных методов повышения производительности персональных компьютеров и рабочих станций было увеличение тактовой частоты центрального процессора, которая с 1978 г. до 2005 г. возросла с 4,77 МГц (процессор Intel 8086) до 3,8 ГГц (процессор Intel Pentium 4), то есть примерно в 1000 раз. Однако из-за фундаментальных физических ограничений (рост потребляемой мощности и тепловыделения, быстро приближающийся физический предел размера транзистора) в последние годы производители центральных процессоров оказались перед необходимостью поиска замены этому традиционному источнику быстродействия.

В 2005 г. ведущие производители центральных процессоров стали предлагать процессоры с двумя вычислительными ядрами вместо одного. До этого времени только мощные серверы и суперкомпьютеры использовали многопроцессорные и многоядерные вычислительные архитектуры. В последующие годы тенденция увеличения числа ядер центрального процессора закрепились и в настоящее время на рынке персональных компьютеров представлены 2-, 4- и 6-ядерные процессорные системы. В будущем число ядер центрального процессора будет только возрастать. Программная реализация вычислений на многоядерных и многопроцессорных архитектурах реализуется на основе протокола MPI (Message Passing Interface).

В отличие от центральных процессоров графические процессоры были изначально ориентированы на параллельные вычисления, что обусловлено особенностями обработки графической информации при выводе ее на дисплей.

Однако специфическая модель программирования через графические программные интерфейсы OpenGL и DirectX была слишком ограничивающей для большинства разработчиков приложений для научных расчетов.

В ноябре 2006 г. корпорация NVidia выпустила первую видеокарту GeForce 8800 GTX с поддержкой технологии CUDA. В отличие от предыдущих поколений графических процессоров, в которых вычислительные ресурсы подразделялись на вершинные и пиксельные шейдеры, в архитектуру CUDA включен унифицированный шейдерный конвейер, позволяющей программе, выполняющей вычисления общего назначения, задействовать любое арифметически-логическое устройство, входящее в состав графического процессора. Так как планировалось, что новое семейство графических процессоров будет использоваться для вычислений общего назначения, то арифметически-логические устройства были сконструированы с учетом требований стандарта IEEE к арифметическим операциям над числами с плавающей точкой одинарной (а позднее и двойной) точности и разработан набор команд, ориентированный на вычисления общего назначения, а не только на графику. Также исполняющим устройствам графических процессоров был разрешен произвольный доступ к памяти для чтения и записи, а также доступ к программно-управляемой кеш-памяти.

Для облегчения доступа разработчиков программного обеспечения к ресурсам технологии CUDA в 2007 г. корпорация NVidia выпустила компилятор расширенной версии языка C/C++, получивший название CUDA C. Несколько позднее был выпущен компилятор CUDA Fortran.

Сравнение роста производительности графических и центральных процессоров представлено на рисунке 21. В настоящее время производительность «настольных суперкомпьютеров» на базе специализированных графических карт Tesla K40 корпорации NVidia достигла 4,3 Тф/с.

Максимальное ускорение, которое можно получить от распараллеливания программы, дается законом Амдала.

$$S = \frac{1}{1 - P + \frac{P}{N}}, \quad (127)$$

где P – доля вычислений, которая может быть идеально распараллелена на N независимых потоков (нитей).

Таким образом, учитывая данные, приведенные на рисунке 1, выражение (20), то обстоятельство, что число физических ядер современных графических процессоров в разы превосходит количество ядер центральных процессоров, а скорость переключения между выполняемыми нитями на графическом процессоре на порядки превосходит аналогичный показатель для центральных процессоров, задача распараллеливания вычислений с применением графических процессоров для научных и инженерных расчетов является актуальной.

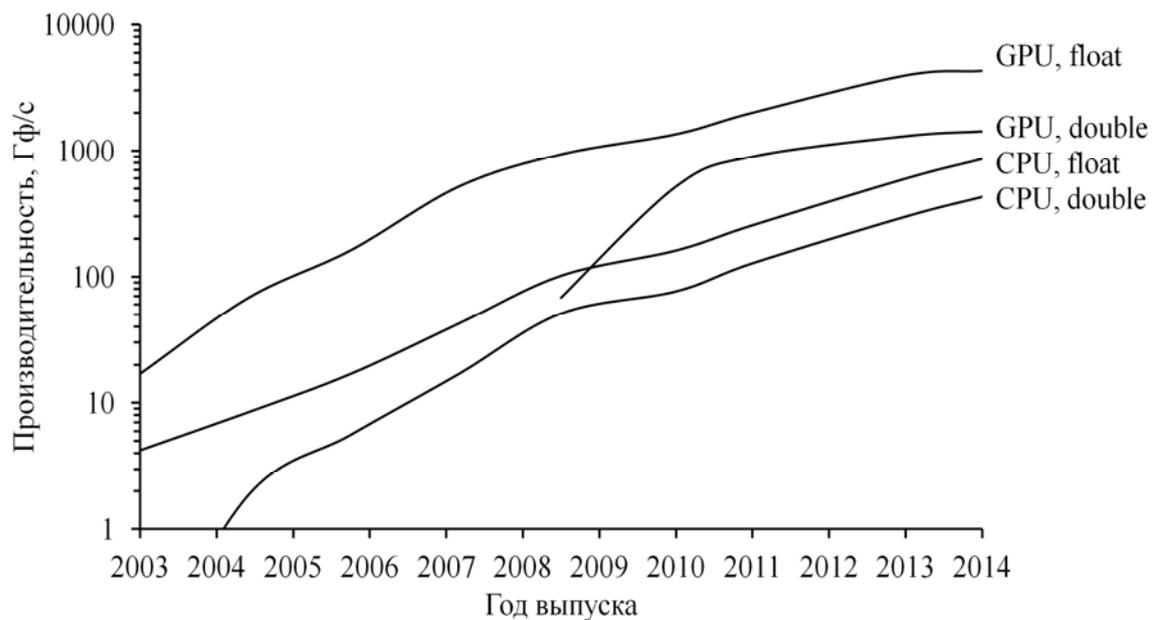


Рис. 21. Сравнение роста производительности графических и центральных процессоров за последнее десятилетие: GPU, float – графический процессор одинарная точность, GPU, double – графический процессор двойная точность, CPU, float – центральный процессор одинарная точность, CPU, double – центральный процессор двойная точность

4.4 ПРИМЕРЫ РЕЗУЛЬТАТОВ МОДЕЛИРОВАНИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

4.4.1. Решение уравнения Пуассона с применением технологии CUDA массивно-параллельных вычислений

На предварительном этапе для оценки эффективности распараллеливания вычислений и погрешности расчетов отдельно решалось двумерное уравнение Пуассона. Решение данной задачи также имеет самостоятельное значение, так как уравнение Пуассона описывает распределение потенциала электрического поля в задачах электростатики и стационарное распределение температуры, например, в изделиях микроэлектроники.

В качестве тестовой задачи рассматривалось уравнение

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - 2\sigma^2}{\sigma^4} \exp\left(-\frac{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (128)$$

в области $x, y \in [0, 1]$ с периодическими граничными условиями, имеющее точное решение

$$\varphi_0(x, y) = \exp\left(-\frac{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2}{2\sigma^2}\right). \quad (129)$$

На рисунке 22 приведена зависимость погрешности численного решения тестовой задачи (21) в сравнении с точным решением по формуле (22) от числа узлов расчетной сетки для различных алгоритмов. Видно, что увеличение числа узлов расчетной сетки уменьшает погрешность решения уравнения Пуассона при применении алгоритма быстрого преобразования Фурье. Погрешность численного расчета решения задачи (21) методом простой итерации зависит от числа узлов расчетной сетки и количества итераций. При заданном числе узлов

имеет место снижение погрешности до некоторой константы с ростом числа итераций. Общей закономерностью является требование увеличения числа итераций для обеспечения заданной точности решения с ростом числа узлов расчетной сетки, что объясняется ухудшением обусловленности матрицы.

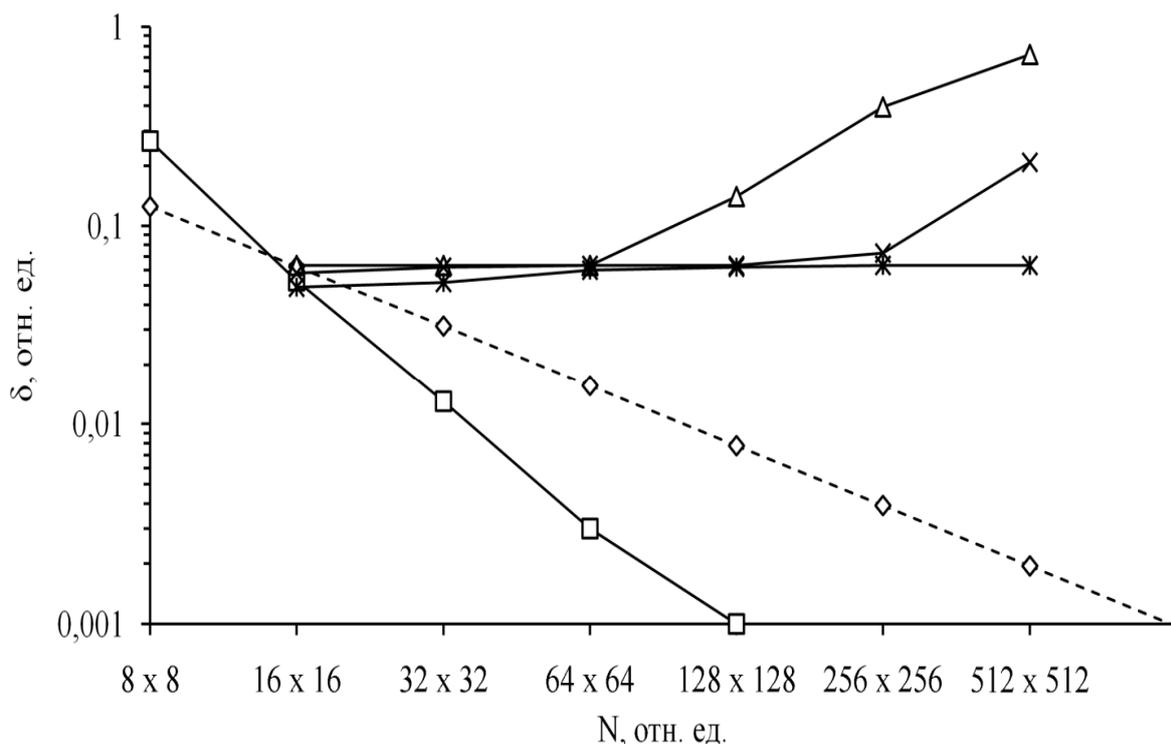


Рис. 22. Зависимость погрешности численного решения тестовой задачи от числа узлов расчетной сетки: \diamond – оценка погрешности $1/N$, \square – метод преобразования Фурье, Δ – метод простой итерации (2000 итераций), \times – метод простой итерации (20000 итераций), \ast – метод простой итерации (200000 итераций)

На рисунке 23 приведена зависимость времени решения задачи (21) от числа узлов расчетной сетки для различных алгоритмов. Видно, что применение быстрого преобразования Фурье для решения уравнения Пуассона позволяет резко снизить время вычисления по сравнению с более общим итерационным алгоритмом. К сожалению, метод решения уравнения Пуассона на основе быст-

рого преобразования Фурье накладывает жесткие ограничения на граничные условия задачи, которые должны быть нулевыми или периодическими, что сужает применимость данного алгоритма. В целом увеличение производительности при решении уравнения Пуассона на графической карте составляет около 10 раз. Для тестирования использовалась система Intel® Core™ 2 Duo CPU T6500 @ 2.1 GHz GeForce GT 120M 1.25 GHz.

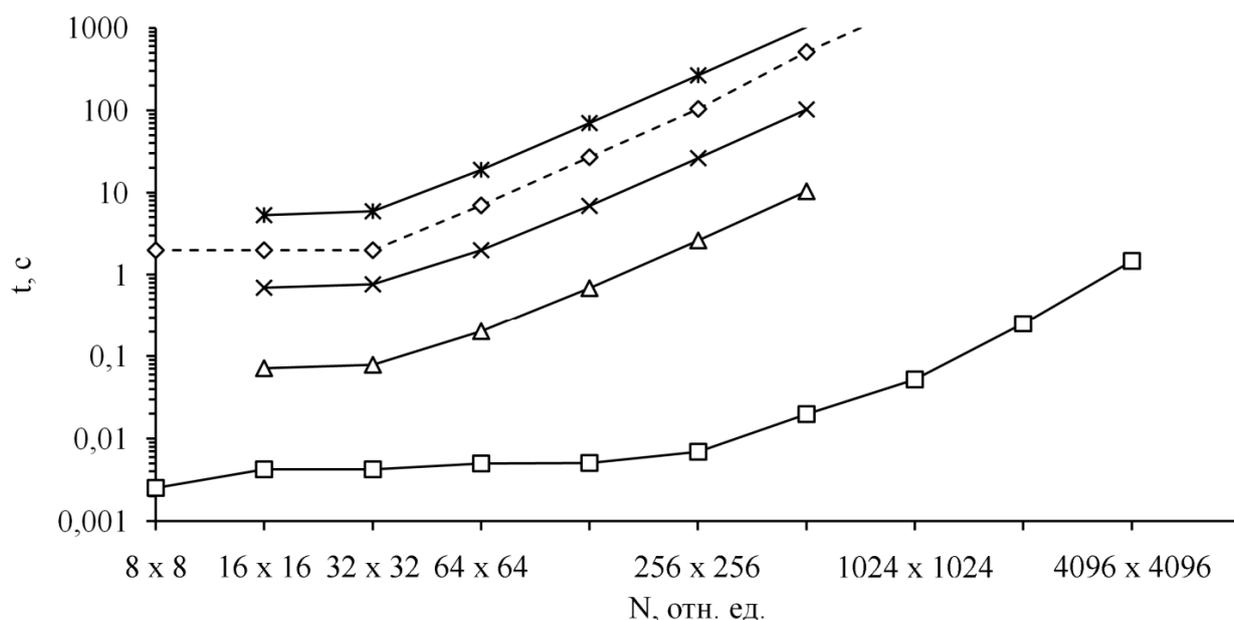


Рис. 23. Зависимость времени решения тестовой задачи от числа узлов расчетной сетки: \diamond – расчет методом простой итерации на центральном процессоре (20000 итераций), \square – метод преобразования Фурье, Δ – метод простой итерации (2000 итераций), \times – метод простой итерации (20000 итераций), \ast – метод простой итерации (200000 итераций)

4.4.2. Решение системы уравнений переноса носителей заряда в полупроводниках с применением технологии CUDA массивно-параллельных вычислений

Для исследования возможностей повышения производительности вычислений при применении технологии CUDA программы решения системы уравнений переноса носителей заряда в полупроводниковых приборах в диффузи-

онно-дрейфовом и квазигидродинамическом приближениях были модернизированы. Наиболее вычислительно емкая процедура решения системы линейных алгебраических уравнений на каждом шаге интегрирования системы дифференциально-алгебраических уравнений была перенесена на графический процессор.

Характерными особенностями матрицы Якоби системы дифференциально-алгебраических уравнений, полученной из системы дифференциальных уравнений в частных производных являются большая размерность и разреженность. Это обуславливает применение итерационных методов для решения системы линейных алгебраических уравнений такого рода задач, например метода бисопряженных градиентов (BiCG). Так как изначально версия программы, целиком выполняемая на центральном процессоре, использовала LU-разложение для решения системы линейных алгебраических уравнений, для корректного сравнения была разработана программа, целиком выполняемая на центральном процессоре и использующая метод бисопряженных градиентов для решения системы линейных алгебраических уравнений. В тестировании участвовали три версии программы (таблица 4).

В качестве объекта моделирования была рассмотрена кремниевая диодная структура из работы [8] с топологией p-области: $N_a = 10^{16} \text{ см}^{-3}$, $L_p = 50 \text{ мкм}$; n-области: $N_d = 10^{16} \text{ см}^{-3}$, $L_n = 50 \text{ мкм}$ и электрофизическими параметрами кремния: $\mu_{0n} = 1440 \text{ см}^2/(\text{В}\cdot\text{с})$, $\tau_n = 10^{-7} \text{ с}$, $\mu_{0p} = 480 \text{ см}^2/(\text{В}\cdot\text{с})$, $\tau_p = 10^{-7} \text{ с}$. Коэффициенты Оже-рекомбинации предполагали равными $C_n = 1,1 \cdot 10^{-30} \text{ см}^6/\text{с}$ и $C_p = 0,3 \cdot 10^{-30} \text{ см}^6/\text{с}$.

Таблица 4. Описание тестируемых программ

Номер версии	Метод решения системы линейных алгебраических уравнений	Используемый для расчетов процессор
1	исключения Гаусса (LU-разложение)	центральный
2	бисопряженных градиентов	центральный

3	бисопряженных градиентов	графический
---	--------------------------	-------------

Тестирование программ проводилось на двух персональных компьютерах с различной производительностью, основные характеристики которых представлены в таблице 5.

Таблица 5. Характеристики персональных компьютеров, используемых для тестирования программ

Номер ПК	Характеристики центрального процессора (ЦП) и оперативной памяти (ОЗУ)	Характеристики видеокарты
1	Intel Core 2 Duo, 2.8 ГГц, 2.8 ГГц ОЗУ – 2 Гб	NVidia GeForce 9500 GT
2*	Intel Core i7-2600, 3.4 ГГц, 3.7 ГГц ОЗУ – 8 Гб	NVidia GeForce GTX 560

* Производительность центрального и графического процессоров выше

Исследование стационарного решения

Результаты моделирования воздействия стационарного ионизирующего излучения на тестовую диодную структуру, приведенные на рисунке 24, сравнивали с данными работы [8]. Качественный ход полученных зависимостей ионизационного тока от темпа генерации неравновесных носителей заряда совпадает с литературными данными. Имеющие место отличия результатов объясняются большим числом узлов расчетной сетки ($N = 8 \dots 1024$ в данной работе против $N = 70$ в работе [8]) и меньшей нормой невязки, при которой решение считалось достигнутым ($\delta = 10^{-7}$ в данной работе против $\delta = 10^{-2}$ в работе [8]).

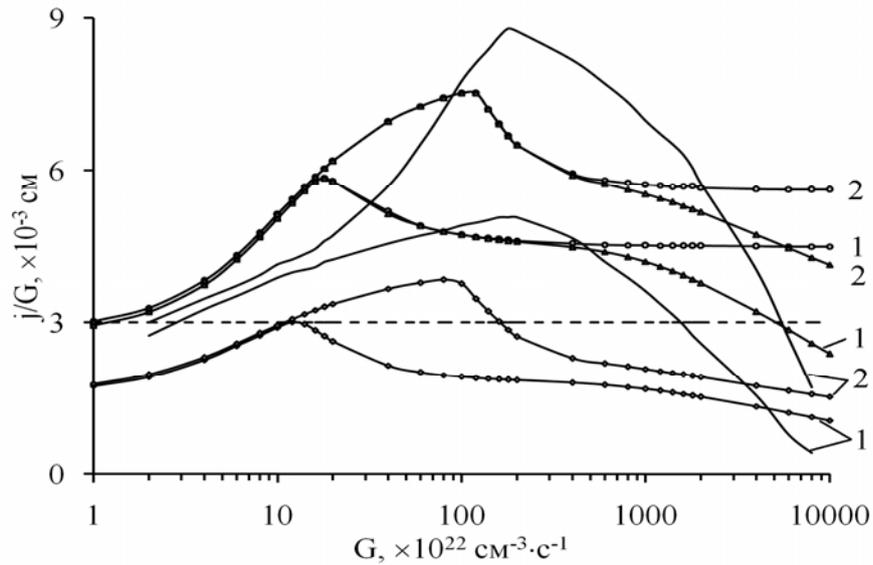


Рис. 24. Зависимость отношения нормированного на темп генерации плотности тока к темпу генерации электронно-дырочных пар от темпа генерации электронно-дырочных пар: 1 – $U = 0$ В, 2 – $U = -5$ В;

--- аналитическая модель [8];

— результаты численного моделирования [8];

—○— $\mu_{0n} = \mu_{0p} = 832,5 \text{ см}^2/(\text{В}\cdot\text{с})$, $C_n = C_p = 0 \text{ см}^6/\text{с}$;

—△— $\mu_{0n} = \mu_{0p} = 832,5 \text{ см}^2/(\text{В}\cdot\text{с})$, $C_n = 1,1 \cdot 10^{-30} \text{ см}^6/\text{с}$, $C_p = 0,3 \cdot 10^{-30} \text{ см}^6/\text{с}$;

—◇— $\mu_{0n} = 1440 \text{ см}^2/(\text{В}\cdot\text{с})$, $\mu_{0p} = 480 \text{ см}^2/(\text{В}\cdot\text{с})$, $C_n = 1,1 \cdot 10^{-30} \text{ см}^6/\text{с}$, $C_p = 0,3 \cdot 10^{-30} \text{ см}^6/\text{с}$

Задача решалась методом установления. Характерные времена решения в зависимости от числа узлов расчетной сетки приведены на рисунке 25. Из результатов, приведенных на рисунке 25, видно следующее:

- заметное сокращение времени расчета от применения распараллеливания вычислений на графическом процессоре при решении рассматриваемой нами тестовой задачи наблюдается при $N > 512$;
- с увеличением числа узлов пространственной сетки (при $N > 512$) прирост времени выполнения программы, полностью выполняемой на центральном процессоре, значительно больше, чем для программы, часть операций которой выполняется на графическом процессоре, независимо от метода решения системы линейных алгебраических уравнений (прямого или итерационного);

- обработка данных на графических процессорах с одинарной точностью не приводит к их заметному искажению по сравнению с обработкой на центральных процессорах с двойной точностью.

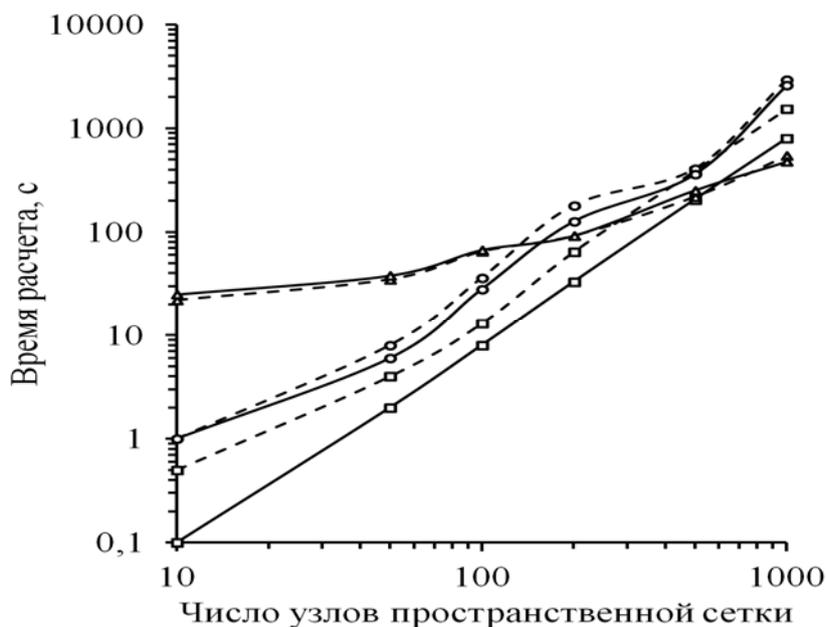


Рис. 25. Зависимость времени расчета при решении тестовой задачи от числа узлов пространственной сетки для трех версий программы и двух персональных компьютеров с различной производительностью: (- - -) – персональный компьютер 1; (—) – персональный компьютер 2; □ – версия программы 1; ○ – версия программы 2; Δ – версия программы 3

Исследование переходных процессов

Результаты моделирования воздействия биэкспоненциального импульса ионизирующего излучения при различных температурах кристаллической решетки полупроводника приведены на рисунке 6. При проведении расчетов учитывали температурные зависимости концентрации собственных носителей заряда в полупроводнике и подвижностей электронов и дырок.

Характерный временной шаг интегрирования системы дифференциально-алгебраических уравнений составил порядка 10^{-13} с на фронте импульса излучения с последующим увеличением до единиц наносекунд на его спаде. Аналогичный расчет на основе явной численной схемы с большей погрешностью тре-

бует временного шага интегрирования порядка 10^{-15} с. Отметим, что с уменьшением длительности фронта импульса ионизирующего излучения, например, при рассмотрении воздействия лазерного импульса наносекундной длительности, эффективность одностадийной схемы Розенброка с комплексным коэффициентом будет только возрастать.

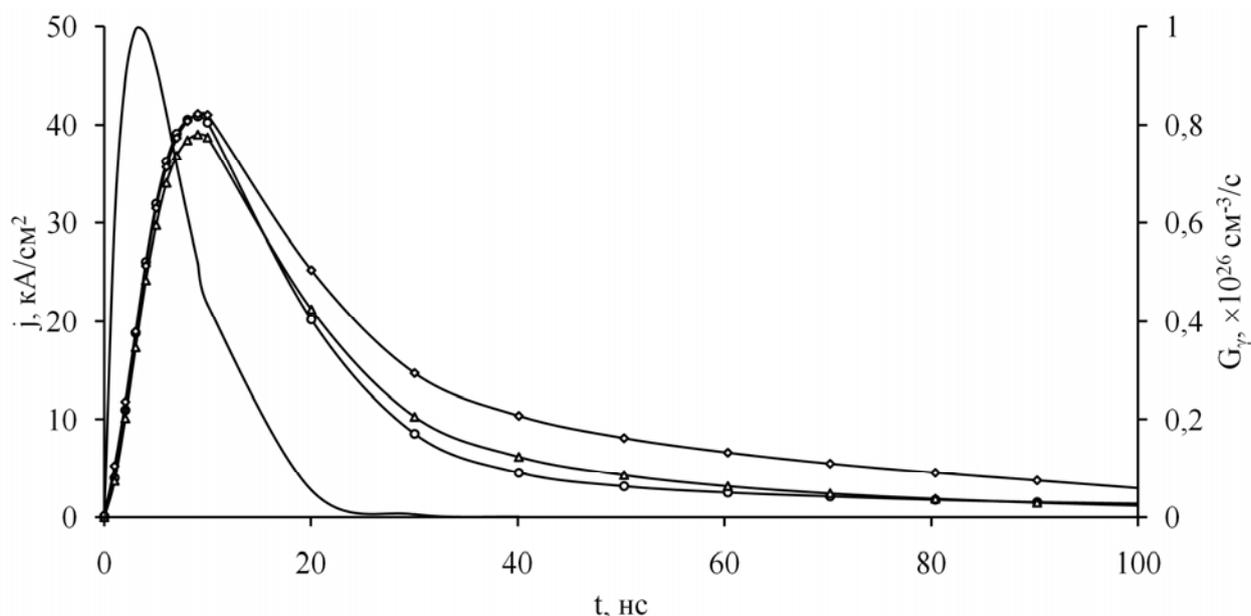


Рис. 26. Зависимость плотности ионизационного тока тестовой диодной структуры от времени для температур: —○— $T = 300$ К; —△— $T = 560$ К; —◇— $T = 680$ К; — — форма импульса ионизирующего излучения

Из графика видно, что увеличение температуры кристаллической решетки тестовой диодной структуры с 300 К до 700 К практически не меняет максимальное значение плотности мгновенной составляющей ионизационного тока, величина которого определяется максимальной интенсивностью излучения. Однако с ростом температуры увеличивается вклад запаздывающей компоненты ионизационного тока, приводящей, в конечном счете, к развитию радиационно-стимулированного лавинно-теплого пробоя. Данный процесс теоретически и экспериментально исследован в работе [23].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сфера применения параллельных вычислений, в частности на графических процессорах, в вычислительной физике неуклонно расширяется. Это позволяет решать как уже существующие задачи с большей детализацией, так и ставить принципиально новые вычислительно сложные задачи. Представленная в данной работе одномерная квазигидродинамическая модель переноса носителей заряда в полупроводниковых приборах легко может быть обобщена на двумерный и трехмерный случай. При этом, по-видимому, более эффективной будет являться пространственная дискретизация методом конечных объемов, обладающая свойством естественной консервативности. Отметим, что расширение математической модели (введение новых уравнений, увеличение размерности задачи) не требует изменения постановки и решения системы дифференциально-алгебраических уравнений, а рост числа узлов расчетной сетки только увеличит эффективность параллельного алгоритма.

Результаты работы доложены на Первой Российско-белорусской научно-технической конференции «Элементная база отечественной радиоэлектроники», посвящённой 110-летию со дня рождения О. В. Лосева, Нижний Новгород, 11-14 сентября 2013 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. С.В.Оболенский, Н.В.Демарина, Е.В.Волкова Основы физики полупроводников: транспорт носителей заряда в электрических полях. – Н.Новгород, 2007, Изд. ННГУ, 65 с.
2. Зи С.М. Физика полупроводниковых приборов / М. Мир, 1981, 567 с.
3. Пожела Ю. Физика быстродействующих транзисторов. Вильнюс: Мокслас, 1989, 264 с.
4. Шур М. Современные приборы на основе GaAs. – М.: Мир, 1991. - 632 с.
5. Хокни Р., Иствуд Дж. Численное моделирование методом частиц М.:Мир, 1987 -640с.
6. Орешкин П.Т. "Физика полупроводников и диэлектриков" Высш.школа М. 1977
7. . Л. Бонч-Бруевич, С. Г. Калашников. Физика полупроводников. М: Наука, 1990.
8. Степаненко И.П. "Основы теории транзисторов и транзисторных схем" Энергия. М. 1977
9. Полевые транзисторы на арсениде галлия. / Под ред Ди Лоренцо Д.В., Канделуола Д.Д. - М.: Радио и связь, 1988. - 496 с.
10. Е.В.Волкова, С.В.Оболенский Полупроводниковые диоды– Н.Новгород, 2014, Изд. ННГУ, 108 с.
11. Ricketts L.W. Fundamentals of Nuclear Hardening of Electronic Equipment. – Wiley-Interscience, 1972. – 548 P.
12. Коршунов Ф.П., Гатальский Г.В., Иванов Г.М. Радиационные эффекты в полупроводниковых приборах. – М.: Наука и техника, 1978. – 232 с.
13. Gwyn C.W., Scharfetter D.L., Wirth G.L. The analysis of radiation effects in semiconductor junction devices // IEEE Transactions on nuclear science. 1967. V.NS-14, №6. P.153-159.

14. Gummel H.K. A self-consistent iterative scheme for one-dimensional steady – state transistor calculation // IEEE Transactions on electron devices. 1964. V.ED-11. P.455-465.
15. Sandborn P.A., Rao A., Blakey P.A. An assessment of approximate nonstationary charge transport models used for GaAs device modeling // IEEE Transactions on electron devices. 1989. Vol.ED-36, №7. P.1244-1253.
16. Demarina N.V., Obolensky S.V. Modeling of ionizing irradiation influence on Schottky-gate field-effect transistor // Microelectronics Reliability. 1999. Vol.39. P.1247-1263.
17. Оболенский С.В. Предел применимости локально-полевого и квазигидродинамического приближений при расчетно-экспериментальной оценке радиационной стойкости субмикронных полупроводниковых приборов // Известия ВУЗов. Электроника. 2002. №6. С.31-38.
18. Кудряшов Н.А., Кучеренко С.С., Сыцько Ю.И. Математическое моделирование фотоэлектрических процессов в полупроводниковых элементах при высоком уровне фотовозбуждения // Математическое моделирование. 1989. Т.1, №12. С.1-12.
19. Gear C.W. Numerical Initial Value Problems in Ordinary Differential Equations. – Englewood, New Jersey: Prentice Hall, 1971. – 253 P.
20. Валиев К.А., Вьюрков В.В., Орликовский А.А. Кремниевая наноэлектроника: проблемы и перспективы // Успехи современной радиоэлектроники. 2010. №6. С.7-22.
21. Lundstrom M. Fundamentals of carrier transport. – Cambridge University Press, 2000. – 418 P.
22. Боресков А.В., Харламов А.А. Основы работы с технологией CUDA. – М.: ДМК Пресс, 2010. – 232 с.
23. Сандерс Д., Кэндрот Э. Технология CUDA в примерах: введение в программирование графических процессоров. – М.: ДМК Пресс, 2011. – 232 с.

24. Боресков А.В., Харламов А.А., Марковский А.А., Микушин Д.Н., Мортиков Е.В., Мыльцев А.А., Сахарных Н.А., Фролов В.А. Параллельные вычисления на GPU. Архитектура и программная модель CUDA. – М.: МГУ, 2012. – 336 с.
25. Электронный ресурс <http://www.nvidia.com>
26. Scharfetter D.L., Gummel H.K. Large-signal analysis of silicon Read diode oscillator // IEEE Transactions on electron devices. 1969. Vol.ED-16, №1. P.64-77.
27. Ting Wei Tang Extension of the Scharfetter-Gummel algorithm to the energy balance equation // IEEE Transactions on electron devices. 1984. Vol.ED-31, №.12. P.1912-1914.
28. Альшин А.Б., Альшина Е.А., Калиткин Н.Н., Корягина А.Б. Схемы Розенброка с комплексными коэффициентами для жестких и дифференциально-алгебраических систем // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2006. Т.46, №8. С.1392-1414.
29. Хайпер Э., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи. М.: Мир, 1999. – 685 с.
30. Электронный ресурс <http://www.synopsys.com>
31. Rosenbrock H.H. Some general implicit processes for the numerical solution of differential equations // Comput. J. 1963. V.5, №4. P.329-330.
32. Электронный ресурс <http://www.intel.com>
33. Пузанов А.С. Перенос электронов в транзисторных структурах в сильных резконеоднородных электрических полях при воздействии потока квантов высоких энергий // Диссертационная работа на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. – Н.Новгород, 2011. – 162 с.
34. Боресков А.В., Харламов А.А. Основы работы с технологией CUDA. – М.: ДМК Пресс, 2010. – 232 с.
35. Сандерс Д., Кэндрот Э. Технология CUDA в примерах: введение в про-

- граммирование графических процессоров. – М.: ДМК Пресс, 2011. – 232 с.
- Боресков А.В., Харламов А.А., Марковский А.А., Микушин Д.Н., Мортиков Е.В., Мыльцев А.А., Сахарных Н.А., Фролов В.А. Параллельные вычисления на GPU. Архитектура и программная модель CUDA. – М.: МГУ, 2012. – 336 с.
36. Воеводин В.В. Вычислительная математика и структура алгоритмов. – М.: МГУ, 2010. – 168 с.
37. Гергель В.П. Высокопроизводительные вычисления для многопроцессорных многоядерных систем. – М.: МГУ, 2010. – 544 с.
38. Корняков К.В., Кустикова В.Д., Мееров И.Б., Сиднев А.А., Сысоев А.В., Шишков А.В. Инструменты параллельного программирования в системах с общей памятью. – М.: МГУ, 2010. – 272 с.
39. Линев А.В., Боголепов Д.К., Бастраков С.И. Технологии параллельного программирования для процессоров новых архитектур – М.: МГУ, 2010. – 160 с.
40. Боресков А.В., Харламов А.А. Основы работы с технологией CUDA. – М.: ДМК Пресс, 2011. – 232 с.
41. Сандерс Дж., Кэндрот Э. Технология CUDA в примерах: Введение в программирование графических процессоров. – М.: ДМК Пресс, 2011. – 232 с.
42. Гречников Е.А., Михайлов С.В., Нестеренко Ю.В., Поповян И.А. Вычислительно сложные задачи теории чисел. – М.: МГУ, 2012. – 312 с.
43. Боресков А.В., Харламов А.А., Марковский А.А., Микушин Д.Н., Мортиков Е.В., Мыльцев А.А., Сахарных Н.А., Фролов В.А. Параллельные вычисления на GPU. Архитектура и программная модель CUDA. – М.: МГУ, 2012. – 336 с.
44. Гергель В.П. Современные языки и технологии параллельного программирования. – М.: МГУ, 2012. – 408 с.
45. Антонов А.С. Технологии параллельного программирования MPI и

- OpenMP. – М.: МГУ, 2012. – 344 с.
46. Лыкосов В.Н., Глазунов А.В., Кулямин Д.В., Мортиков Е.В., Степаненко В.М. Суперкомпьютерное моделирование в физике климатической системы. – М.: МГУ, 2012. – 408 с.
47. Якововский М.В. Введение в параллельные методы решения задач. – М.: МГУ, 2013. – 328 с.
48. Стронгин Р.Г., Гергель В.П., Гришагин В.А., Баркалов К.А. Параллельные вычисления в задачах глобальной оптимизации – М.: МГУ, 2013. – 280 с.
49. Рутм Г., Фатика М. CUDA Fortran для ученых и инженеров. – М.: ДМК Пресс, 2014. – 364 с.

Контрольные вопросы:

1. Каковы характерные пространственные масштабы в физике полупроводниковых структур?
2. Что такое зонная диаграмма?
3. Какие приближения применяются при описании движения электронов в полупроводниках?
4. В чем физический смысл терминов время жизни и диффузионная длина?
5. В чем физический смысл фундаментальной системы уравнений, описывающей перенос электронов в полупроводниковых структурах?
6. Каковы возможности метода Монте-Карло при проведении анализа процессов переноса электронов в полупроводниковых структурах?
7. Каковы особенности применения методов высокопроизводительных вычислений при анализе полупроводниковых структур?
8. Что такое технология CUDA?
9. В чем особенности решения уравнения Пуассона с применением технологии массивно-параллельных вычислений?
10. Каковы методы решения системы дифференциально-алгебраических уравнений с использованием параллельных вычислений?

Екатерина Валерьевна **Волкова**
Александр Сергеевич **Пузанов**
Сергей Владимирович **Оболенский**

**ПРИМЕНЕНИЕ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ
В ЗАДАЧАХ МОДЕЛИРОВАНИЯ
ТРАНСПОРТА ЭЛЕКТРОНОВ В ПОЛУПРОВОДНИКАХ
В УСЛОВИЯХ РАДИАЦИОННОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ**

Учебное пособие

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского».
603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.

Подписано в печать . Формат 60×84 1/16.
Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура Таймс.
Усл. печ. л. . Уч-изд. л.
Заказ № . Тираж 20 экз.

Отпечатано в типографии Нижегородского госуниверситета
им. Н.И. Лобачевского
603600, г. Нижний Новгород, ул. Большая Покровская, 37
Лицензия ПД № 18-0099 от 14.05.01